I. rész

1. *Az $a = \overline{374x25y}$ tízes számrendszerbeli számban az x és y számjegyek véletlenszerű megválasztásánál mi a valószínűsége annak, hogy a szám osztható 15-tel?*

Megoldás. Az x és az y egymástól függetlenül 10-féleképpen választható meg, ezért 100 darab adott alakú szám van. 15-tel csak azok a számok oszthatók, amelyek 3-mal és 5-tel is oszthatók. Az a szám csak akkor osztható 5-tel, ha az y értéke 0 vagy 5.

Ha $y = 0$, akkor a számjegyek összege $3 + 7 + 4 + x + 2 + 5 + 0 = 21 + x$, ezért az x lehetséges értékei 0, 3, 6 vagy 9. Így 4 darab olyan számot kapunk, amely 0-ra végződik és osztható 15-tel.

Ha $y = 5$, akkor a számjegyek összege $3+7+4+x+2+5+5 = 26+x$, itt az x lehetséges értéke 1, 4 vagy 7 lehet, újabb 3 számot kapunk.

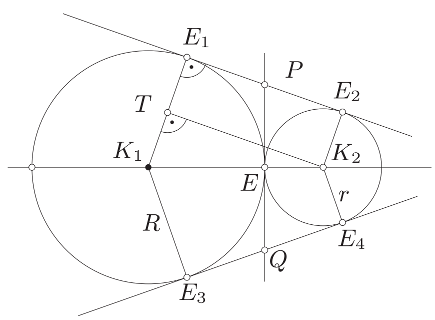
Tehát ha felírnánk az x és y összes lehetséges értékével a 100 darab számot, akkor 7 darab lenne közöttük, amely osztható 15-tel. A kérdéses valószínűség így 0,07.

2. *Két különböző sugarú kör kívülről érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy a közös belső érintőnek a közös külső érintők közötti szakasza egyenlő a két sugár mértani közepének a kétszeresével.*

Megoldás. Mivel körhöz külső pontból egyenlő hosszúságú érintők húzhatók, azért az *ábra* jelölései alapján

$$PE = PE_1 = PE_2 = QE = QE_3 = QE_4,$$

így $PQ = PE_1 + PE_2 = E_1E_2 = a$.



A K_1K_2T háromszögben $(R-r)^2 + a^2 = (R+r)^2$. Ebből $a^2 = 4Rr$, azaz

$$PQ = a = 2\sqrt{R \cdot r}.$$

3. *Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet:*

a) $(x-3) \cdot (4x-3y) = 0$;

b) $17x^2 - 24xy + 9y^2 - 6x + 9 = 0$;

c) $\dfrac{4x-3y}{x-3} = 0$;

d) $\dfrac{x-3}{4x-3y} = 0$.

Megoldás. *a)* $(x-3) \cdot (4x-3y) = 0$. Egy szorzat csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, azaz $x - 3 = 0$, vagy $4x - 3y = 0$. Ezekből $x = 3$, és y tetszőleges valós szám, vagy $y = \dfrac{4}{3}x$.

b)

b)

$$17x^2 - 24xy + 9y^2 - 6x + 9 = 0$$

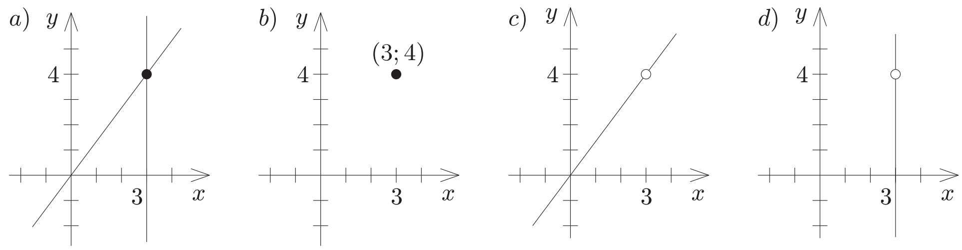
$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(4x-3y)^2 + (x-3)^2 = 0.$$

Mivel $(4x-3y)^2 \geq 0$, és $(x-3)^2 \geq 0$, azért az egyenlőség csak abban az esetben teljesül, ha $x - 3 = 0$ és $4x - 3y = 0$, azaz $x = 3$ és $y = 4$. Ez egyetlen pontra teljesül, ez $P(3;4)$.

c) $\dfrac{4x-3y}{x-3} = 0 \;\Rightarrow\; 4x - 3y = 0$, de $x - 3 \neq 0$, azaz $y = \dfrac{4}{3}x$, de $x \neq 3$.

d) $\dfrac{x-3}{4x-3y} = 0 \;\Rightarrow\; x - 3 = 0$, de $4x - 3y \neq 0$, azaz $x = 3$, de $y \neq \dfrac{4}{3}x$, és így $y \neq 4$.



4. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:*

$$2^x + 2^{-x} + \frac{1}{2^x + 2^{-x}} \geq -\frac{11}{3\sqrt{2}} \log_{(3-2\sqrt{2})} \left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Megoldás. Az egyenlőtlenség minden valós x-re értelmezve van. A logaritmus alapja és a logaritmus numerusza is pozitív, az alap nem egyenlő 1-gyel, valamint e két érték egymás reciproka, hiszen szorzatuk 1, ezért a $\log_{(3-2\sqrt{2})}\left(3+2\sqrt{2}\right) = -1$. Ennek felhasználásával az egyenlőtlenség a következőképpen módosul:

$$2^x + 2^{-x} + \frac{1}{2^x + 2^{-x}} \geq \frac{11}{3\sqrt{2}}.$$

Vezessük be a $2^x + 2^{-x} = 2^x + \dfrac{1}{2^x} = a$ jelölést. Ekkor $a \geq 2$.

$$a + \frac{1}{a} \geq \frac{11}{3\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; 3\sqrt{2}a^2 - 11a + 3\sqrt{2} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ vagy } a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$a \geq 2$, így csak az $a \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ esetet kell vizsgálni.

$$2^x + \frac{1}{2^x} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot (2^x)^2 - 3\sqrt{2} \cdot 2^x + 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 2^x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}} \text{ vagy } 2^x \geq \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

A megoldás: $x \leq -\dfrac{1}{2}$ vagy $x \geq \dfrac{1}{2}$.

II. rész

5. *Három pozitív szám harmonikus közepe* $\dfrac{180}{13}$, *a mértani középük* $10\sqrt[3]{3}$, *a négyzetes középük pedig* $\sqrt{\dfrac{725}{3}}$. *Mivel egyenlő a számtani középük?*

Megoldás. A feladat feltételei alapján felírhatjuk, hogy

(1)
$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{180}{13} \;\Rightarrow\; \frac{3abc}{ab + ac + bc} = \frac{180}{13},$$

(2)
$$\sqrt[3]{abc} = 10\sqrt[3]{3} \;\Rightarrow\; abc = 3000,$$

(3)
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \sqrt{\frac{725}{3}} \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 + c^2 = 725.$$

Az $abc = 3000$ értékét helyettesítsük be az (1) egyenletbe:

$$\frac{9000}{ab + ac + bc} = \frac{180}{13} \;\Rightarrow\; ab + ac + bc = \frac{9000 \cdot 13}{180} = 650 \;\Rightarrow\; 2(ab + ac + bc) = 1300.$$

Ehhez az utóbbi egyenlethez adjuk hozzá a (3) egyenletet:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2025 \;\Rightarrow\; (a + b + c)^2 = 2025 \;\Rightarrow\; a + b + c = \pm 45.$$

Mivel a, b és c pozitív, azért $\dfrac{a + b + c}{3} = 15$.

6. *a) A $4px^2-(2p^3-8p+2)x+p^2-4=0$ másodfokú egyenletben határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az ellentétes előjelű valós gyökök közül egyik se legyen nagyobb $\frac{1}{2}$-nél.*

b) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre az

$$y=4px^2-(2p^3-8p+2)x+p^2-4$$

függvény az $x=2$-nél veszi fel a maximumát, és ennek értéke -8?

Megoldás. *a)* A másodfokú egyenletben $p\neq 0$. Az egyenlet gyökei a következő alakban írhatók fel:

$$x_{1,2}=\frac{2p^3-8p+2\pm\sqrt{\left(2p^3-8p+2\right)^2-16p(p^2-4)}}{8p}.$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D=\left(2p^3-8p+2\right)^2-16p(p^2-4)=4p^6+64p^2+4-32p^4+8p^3-32p-16p^3+64p=$$
$$=\left(2p^3-8p-2\right)^2\geq 0,$$

az egyenletnek a p paraméter minden szóbajövő értékére valós gyökei vannak. A gyökök akkor és csak akkor ellenkező előjelűek, ha a szorzatuk negatív: a Viète-formula szerint $x_1\cdot x_2=\dfrac{p^2-4}{4p}<0$.

I. $p>0$ és $p^2-4<0\ \Rightarrow\ 0<p<2$. Ekkor x_1 negatív és x_2 pozitív. Így

$$x_1<x_2=\frac{1}{2p}\leq\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ p\geq 1,\quad\text{tehát}\quad 1\leq p<2.$$

II. $p<0$ és $p^2-4>0\ \Rightarrow\ p<-2$. Ebben az esetben

$$x_2<x_1=\frac{p^2-4}{2}\leq\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -\sqrt5\leq p\leq\sqrt5,\quad\text{azaz}\quad -\sqrt5\leq p<-2.$$

Tehát $-\sqrt5\leq p<-2$ vagy $1\leq p<2$.

b) Ha $x=2$, akkor $y=16p-4p^3+16p-4+p^2-4=-8\ \Rightarrow\ 4p^3-p^2-32p=0$. Ennek gyökei: $p_1=0$, $p_2=\dfrac{1+\sqrt{513}}{8}$ és $p_3=\dfrac{1-\sqrt{513}}{8}$. Mivel a másodfokú függvénynek csak negatív főegyüttható mellett lehet maximuma, azért csak $p_3=\dfrac{1-\sqrt{513}}{8}$ jöhet szóba. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ebben az esetben adódó másodfokú polinomnak nem a 2 helyen van a maximuma, így a feladat kérdésére a válasz tagadó.

7. *Az $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(-a_1;-a_2)$ és $D(-b_1;-b_2)$ pontokat forgassuk el az origó körül 90°-kal pozitív irányba, majd az így kapott pontokra alkalmazzunk origó középű kétszeres nyújtást. A kapott pontok legyenek rendre A_1, B_1, C_1 és D_1. Igazoljuk, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 szakaszok felezőpontjai paralelogrammát határoznak meg, vagy egy egyenesre esnek.*

Megoldás. Határozzuk meg először a forgatva nyújtással kapott pontok koordinátáit:

$$A(a_1;a_2)\ \Rightarrow\ A_1(-2a_2;2a_1),\qquad B(b_1;b_2)\ \Rightarrow\ B_1(-2b_2;2b_1),$$
$$C(-a_1;-a_2)\ \Rightarrow\ C_1(2a_2;-2a_1),\qquad D(-b_1;-b_2)\ \Rightarrow\ D_1(2b_2;-2b_1).$$

A felezési pontok koordinátái:

$$\begin{array}{ll}
AA_1\text{ szakasz esetén} & F_1\left(\dfrac{a_1-2a_2}{2};\dfrac{a_2+2a_1}{2}\right),\\[2ex]
BB_1\text{ szakasznál} & F_2\left(\dfrac{b_1-2b_2}{2};\dfrac{b_2+2b_1}{2}\right),\\[2ex]
CC_1\text{ szakasznál} & F_3\left(\dfrac{-a_1+2a_2}{2};\dfrac{-a_2-2a_1}{2}\right),\\[2ex]
DD_1\text{ esetén} & F_4\left(\dfrac{-b_1+2b_2}{2};\dfrac{-b_2-2b_1}{2}\right).
\end{array}$$

Az F_3 koordinátái az F_1 megfelelő koordinátáinak ellentettjei, ugyanez teljesül F_4 és F_2 koordinátáira, így F_3 az F_1-nek, F_4 az F_2-nek az origóra vonatkozó tükörképe. A négy pont tehát vagy egy egyenesre esik, vagy egy paralelogramma négy csúcsa.

Ha az adott pontok egy egyenesre esnek, azaz $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, akkor az F_1, F_2, F_3 és F_4 pontok is egy egyenes mentén helyezkednek el, mert az $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ egyenlőségből következik, hogy

$$\frac{\frac{a_1-2a_2}{2}}{\frac{a_2+2a_1}{2}} = \frac{\frac{b_1-2b_2}{2}}{\frac{b_2+2b_1}{2}}.$$

8. *Hány valós megoldása van az*

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+3} = k$$

egyenletnek, ha a k valós paraméter?

Megoldás. A nevező sosem nulla, az adott egyenlet ekvivalens átalakításával a következő, legfeljebb másodfokú egyenlethez jutunk: $(k-1)x^2 + (2k+4)x + 3k - 4 = 0$. Ha $k = 1$, akkor $6x - 1 = 0$, $x = \dfrac{1}{6}$. Ekkor egy valós megoldás van. Ha $k \neq 1$, akkor másodfokú az egyenlet, és a diszkriminánsa $D = (2k+4)^2 - 4(k-1)(3k-4) = -8k^2 + 44k$. Ha $D = 0$, azaz $k = 0$, vagy $k = 5{,}5$, akkor szintén egy valós megoldása (egy kétszeres gyöke) van az egyenletnek. Ha D pozitív, azaz $0 < k < \dfrac{11}{2}$, de $k \neq 1$, akkor két különböző valós megoldás van. Ha D negatív, azaz $k < 0$ vagy $k > \dfrac{11}{2}$, akkor nincs valós megoldás.

Megjegyzés: Az eredményből következik, hogy a valós számok halmazán értelmezett $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+2x+3}$ törtkifejezés értékkészlete a $\left[0; \dfrac{11}{2}\right]$ zárt intervallum.

9. *Egy dobozban n darab fehér és kétszer annyi fekete golyó van ($n \geq 3$), amelyek tapintással nem különböztethetők meg. Visszatevés nélkül kihúzunk 3 darabot.*

a) A ξ valószínűségi változó jelentse a mintában lévő fehér golyók számát. Határozzuk meg a $\mathrm{P}(\xi = 0)$, $\mathrm{P}(\xi = 1)$, $\mathrm{P}(\xi = 2)$ és a $\mathrm{P}(\xi = 3)$ valószínűségeket.

b) Milyen n esetén lesz 0,25-nál nagyobb annak a valószínűsége, hogy legalább 2 fehér golyó van a mintában?

c) Mennyi az a) részben kiszámított valószínűségek határértéke, ha az n tart a $+\infty$-hez?

d) Hogyan módosulnak az a) részben megadott valószínűségek, ha visszatevéses mintával dolgozunk?

Megoldás. *a)* A mintában lévő fehér golyók száma ξ, amelynek értékei 0, 1, 2 vagy 3.

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{n}{0}\cdot\binom{2n}{3}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{8n^2-12n+4}{27n^2-27n+6},$$

$$\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{\binom{n}{1}\cdot\binom{2n}{2}}{\binom{3n}{3}} = \frac{n\cdot\frac{2n(2n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{4n^2-2n}{9n^2-9n+2},$$

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{n}{2}\cdot\binom{2n}{1}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2n}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{2n^2-2n}{9n^2-9n+2},$$

$$\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{n}{3}\cdot\binom{2n}{0}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{n^2-3n+2}{3\cdot(9n^2-9n+2)}.$$

b) Annak valószínűsége, hogy legalább két fehér golyó van a mintában:

$$\mathrm{P}(\xi \geq 2) = \frac{3\cdot(2n^2-2n)+n^2-3n+2}{3\cdot(9n^2-9n+2)} = \frac{7n^2-9n+2}{27n^2-27n+6} > \frac{1}{4}.$$

A nevező pozitív számok szorzata (n legalább 3), ezért a fenti egyenlőtlenség egyenértékű az $n^2 - 9n + 2 > 0$ egyenlőtlenséggel. Ennek megoldása $n < \dfrac{9-\sqrt{73}}{2} \approx 0{,}228$ vagy $n > \dfrac{9+\sqrt{73}}{2} \approx 8{,}772$. Ezek alapján az n legalább 9.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi = 0) = \dfrac{8}{27}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} P(\xi = 1) = \dfrac{12}{27}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi = 2) = \dfrac{6}{27}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi = 3) = \dfrac{1}{27}$.

d) Visszatevéses mintával dolgozva

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \qquad \mathrm{P}(\xi = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27},$$

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}, \qquad \mathrm{P}(\xi = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}.$$

Megjegyzés: Ezek a valószínűségek rendre megegyeznek a *c*) részben kiszámított határértékekkel.