I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenletet:* $\left(x-\sqrt{x-2}-2\right)\left(x-\sqrt{x-3}-3\right)=0.$ *(11 pont)*

Megoldás. Értelmezési tartomány: $x \geq 3$. Szorzattá alakítva:

$$\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-3}-1\right)=0.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha legalább egy tényezője nulla. A négy tényező rendre a 2, 3, 3, 4 helyen nulla. Az értelmezési tartományt figyelembe véve az egyenlet megoldása: $x_1=3$, $x_2=4$.

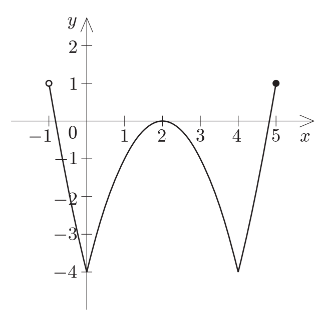
2. *Adott az* $f\colon\ ]-1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|(x-2)^2-4\right|-4$ *függvény.*
a) Adjuk meg a koordinátarendszerben azon rácspontokat, amelyek illeszkednek a függvény grafikonjára.
b) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.
c) Mely intervallumokon növekedő a függvény? *(12 pont)*

Megoldás. *a)* A függvény értelmezési tartományában hat egész szám található (a 0, 1, 2, 3, 4 és az 5), ezért hatnál több rácspont nem illeszkedhet a függvény grafikonjára. A függvény egész számhoz egész számot rendel, így hat rácspontot kapunk: $(0;-4)$, $(1;-1)$, $(2;0)$, $(3;-1)$, $(4;-4)$ és $(5;1)$.

b) Ha $(x-2)^2\geq 4$, azaz $x\leq 0$ vagy $4\leq x$, akkor $(x-2)^2-4-4=0$. Innen kapjuk: $x_1=2-2\sqrt{2}$, $x_2=2+2\sqrt{2}$. Ezek az értékek minden feltételnek megfelelnek, így a függvény zérushelyei.

Ha $(x-2)^2<4$, azaz $0<x<4$, akkor $-(x-2)^2+4-4=0$. Innen az $x_3=2$ zérushelyet kapjuk.

c) A normálparabola transzformálásával a függvény képe megrajzolható. A $[0;2]$ és a $[4;5]$ intervallumokon a függvény növekedő.



3. *A koordinátarendszerben adott két pont:* $A(1;5)$ *és* $B(7;7)$. *Adjuk meg az* x *tengely azon* P *pontjának koordinátáit, amelyre*
a) $AP=BP$;
b) $AP^2+BP^2=94$;
c) $AP+BP$ *minimális.* *(14 pont)*

Megoldás. *a)* Az AB szakasz felező merőlegesének és az x tengelynek a metszéspontja az egyetlen megfelelő pont. Az AB felező merőlegese az $F(4;6)$ felezőpontra illeszkedik, a normálvektora pedig $\vec{n}(3;1)$, az egyenlete: $3x+y=18$. Ez az egyenes az x tengelyt a $P_1(6;0)$ pontban metszi. Ez a keresett pont.

b) Az $AP^2+BP^2=94$ feltételnek megfelelő $P(x;y)$ pontok koordinátáira teljesülni kell a következő egyenletnek: $(x-1)^2+(y-5)^2+(x-7)^2+(y-7)^2=94$, amelyet az $(x-4)^2+(y-6)^2=37$ alakra tudunk hozni. Ez egy kör egyenlete. A feladat feltételeinek megfelelő pontok az $F(4;6)$ középpontú, $\sqrt{37}$ sugarú kör és az x tengely metszéspontjai lesznek. Az $y=0$ helyettesítéssel két x értéket kapunk. A feladat két megoldása: $P_2(3;0)$, $P_3(5;0)$.

c) Igazolható, hogy az $A'B$ egyenes és az x tengely metszéspontja a feltételeknek megfelelő pont, ahol $A'(1;-5)$ az A tükörképe az x tengelyre. Az $A'B$ egyenes egyenlete: $2x-y-7=0$. Ez az egyenes az x tengelyt a $P_4\left(\dfrac{7}{2};0\right)$ pontban metszi. Ez a keresett pont.

4. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\left.\begin{aligned}2^{3x+2}&=4y^3-407y+20\\ x&=\log_2(y-4).\end{aligned}\right\}$$
(14 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány: x valós szám, $y>4$. A második egyenlet szerint: $2^x=y-4$. Ekkor $2^{3x+2}=4\cdot\left(2^x\right)^3=4(y-4)^3=4y^3-48y^2+192y-256$. Ez az első egyenlet alapján: $4y^3-48y^2+192y-256=4y^3-407y+20$, azaz $0=48y^2-599y+276$. A másodfokú egyenletet megoldva: $y_1=12$, $y_2=\dfrac{23}{48}$. Csak y_1 eleme az értelmezési tartománynak, a második egyenletbe behelyettesítve megkapjuk x értékét.

Az egyenletrendszer megoldása: $x=3$, $y=12$.

II. rész

5. *Egy mértani sorozat első eleme a, a hányadosa q. Mennyi annak a mértani sorozatnak az első eleme, amelynek a hányadosa q^2, az első 25 elem összege pedig az adott sorozat első 50 elemének összegével egyenlő?* (16 pont)

Megoldás. Legyen a keresett mértani sorozat első eleme b_1. Ha $q=1$, akkor $S_{50}=50a_1=25b_1$, tehát $b_1=2a_1$. Ha $q=-1$, akkor $S_{50}=0=25b_1$, azaz $b_1=0$. Ha $q^2\neq 1$, akkor az összegképlet és a feltétel felhasználásával

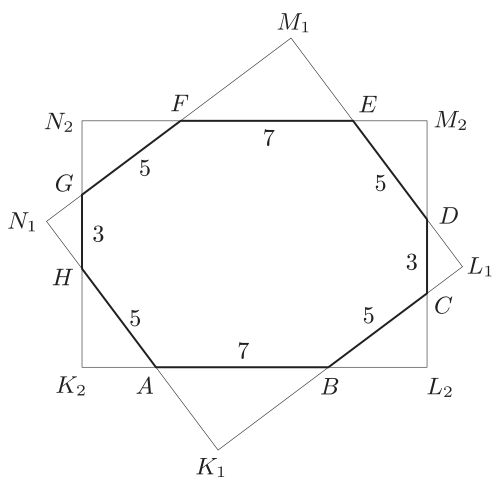
$$b_1\frac{(q^2)^{25}-1}{q^2-1}=b_1\frac{q^{50}-1}{q^2-1}=a_1\frac{q^{50}-1}{q-1}.$$

Ebből következik, hogy $a_1=\dfrac{b_1}{q+1}$, vagyis $b_1=a_1(1+q)=a_1+a_2$.

Az új sorozat első tagja az adott sorozat első és második tagjának összegével egyenlő és ez a $q^2=1$ esetben is igaz.

6. *Egy érettségiző osztály a tablóját középpontosan szimmetrikus nyolcszög alakúra tervezte. A nyolcszöget egy* 1 m×1,4 m-*es téglalap alakú lemezből szerették volna elkészíteni úgy, hogy a téglalap sarkainál négy egybevágó derékszögű háromszöget levágatnak. Ekkor természetesen a téglalap négy oldalegyenese a nyolcszögnek is oldalegyenese lesz. Az így kapott nyolcszög oldalai deciméterben mérve sorban:* 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 5. *Mennyivel változna a hulladék mennyisége, ha ezt a nyolcszöget a másik négy oldalegyenese által meghatározott téglalapból vágatták volna ki?* (16 pont)

Megoldás. A vázlatrajzon megrajzoltuk az $ABCDEFGH$ nyolcszöget és a lehetséges két téglalapot, a $K_1L_1M_1N_1$ és a $K_2L_2M_2N_2$ téglalapot.



A négy egybevágó derékszögű háromszög átfogója 5 dm. A középpontos szimmetria miatt: $AK_2=CL_2=EM_2=GN_2=x$, ekkor $HK_2=BL_2=DM_2=FN_2=7-x$. A Pitagorasz-tétel szerint: $x^2+(7-x)^2=25$. Az innen kapott két gyök nem ad két megoldást, mert amikor $x=3$, akkor $7-x=4$, amikor $x=4$, akkor pedig $7-x=3$. Így megkaptuk a négy egybevágó háromszög oldalainak hosszát: 3, 4, 5. (Vázlatrajzunkon $AK_2=3$.) Ezekhez hasonló háromszögeket kapunk, ha a $K_1L_1M_1N_1$ téglalapból vágjuk le a derékszögű háromszögeket. A két-két szemközti levágott háromszög egybevágó. A hasonló derékszögű háromszögek hasonlósági arányát az átfogók aránya adja, így az ismeretlen befogók hosszát ki tudjuk számítani aránypár felírásával:

$$\frac{AK_1}{7}=\frac{3}{5},\ \text{azaz}\ AK_1=EM_1=\frac{21}{5},\qquad \frac{BK_1}{7}=\frac{4}{5},\ \text{azaz}\ BK_1=FM_1=\frac{28}{5},$$

$$\frac{CL_1}{3}=\frac{3}{5},\ \text{azaz}\ CL_1=GN_1=\frac{9}{5},\qquad \frac{DL_1}{3}=\frac{4}{5},\ \text{azaz}\ DL_1=HN_1=\frac{12}{5}.$$

A $K_1L_1M_1N_1$ téglalap oldalainak hossza: $K_1L_1=\dfrac{28}{5}+5+\dfrac{9}{5}=\dfrac{62}{5}$, $L_1M_1=\dfrac{12}{5}+5+\dfrac{21}{5}=\dfrac{58}{5}$.

Ennek a téglalapnak a területe: $t_1=\dfrac{62}{5}\cdot\dfrac{58}{5}=\dfrac{3596}{25}=143{,}84$ (dm^2). Ebben az esetben 3,84 dm^2-rel nagyobb lenne a hulladék, hiszen a másik téglalap területe csak 140 dm^2.

7. *Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív x értéket, amelyre* $\sin x$ *és* $\sin 2x$ *egy derékszögű háromszög befogói,* $\sin 3x$ *pedig az átfogója.* (16 pont)

Megoldás. Oldjuk meg a $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$ egyenletet. Rendezés után $\sin^2 2x=(\sin 3x-\sin x)(\sin 3x+\sin x)$. A jobb oldal

$$(2\cos 2x\sin x)(2\sin 2x\cos x)=2\sin^2 2x\cos 2x,$$

az egyenlet tehát $0=\sin^2 2x(2\cos 2x-1)$. A megoldások: $x_1=k_1\frac{\pi}{2}$, $k_1\in\mathbb{Z}$, $x_2=\frac{\pi}{6}+k_2\pi$, $k_2\in\mathbb{Z}$, $x_3=-\frac{\pi}{6}+k_3\pi$, $k_3\in\mathbb{Z}$.

A keresett x érték a $\frac{\pi}{6}$. (Ekkor a háromszög oldalai: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és 1.)

8. *Egy áruház szeretné megajándékozni azokat, akik az akciós májkonzervből legalább hetet vásárolnak. Az áruházban a konzervdobozokat négyzet alapú gúlába tornyozták. Például egy négy rétegű gúlát $16+9+4+1$ darab dobozból lehet elkészíteni. A vásárlók egy szerencsekerék megforgatásával 1-től 50-ig egyenlő eséllyel sorsolhatnak egy egész számot. Ha az ennyi rétegből felépíthető gúlában a konzervdobozok száma osztható 7-tel, akkor az illető ajándékot kap.*

a) Az áruház dolgozói egy 16 rétegű gúlát építettek. Hány dobozt használtak fel?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ajándékra jogosító számot pörgetünk?

c) Az egyik vásárló olyan számot forgatott, hogy az ennyi rétegű gúlában a dobozok száma 7-tel és 13-mal is osztható volt. Melyik szám lehetett ez? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első 16 pozitív egész szám négyzetének összegét kell kiszámítanunk. Tudjuk, hogy

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \text{azaz}\quad S_{16}=\frac{16(16+1)(2\cdot 16+1)}{6}=1496.$$

1496 darab konzervdobozból építették ezt a gúlát.

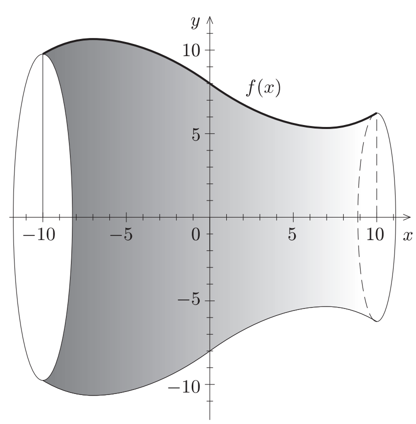
b) Először meghatározzuk azokat az n értékeket, amelyre $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ osztható 7-tel. Ez pontosan akkor teljesül, ha a számlálóban szereplő tényezők közül legalább egy osztható 7-tel. $(6;7)=1$, $n=7k$ vagy $n=7k-1$ vagy $n=7k+3$ (k természetes szám). Az $[1;50]$ intervallumban az ilyen számok: 3, 6, 7, 10, 13, 14, 17, 20, 21, 24, 27, 28, 31, 34, 35, 38, 41, 42, 45, 48, 49, összesen 21 darab.

$\frac{21}{50}$, azaz 0,42 az esélye annak, hogy aki szerencsekereket pörget, az valamilyen ajándékot kap.

c) Most azokat az n értékeket határozzuk meg, amelyre az $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ osztható 13-mal. Ez pontosan akkor teljesül, ha a számlálóban szereplő tényezők közül legalább egy osztható 13-mal. $(6;13)=1$, $n=13k$ vagy $n=13k-1$ vagy $n=13k+6$ (k természetes szám). Ezek közül az $[1;50]$ intervallumba a következő számok esnek: 6, 12, 13, 19, 25, 26, 32, 38, 39, 45. A 6, 13, 38 és 45 szerepelt a 7-tel oszthatóságnál is.

A vásárló e négy szám valamelyikét sorsolta ki.

9. *Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amely az $f\colon[-10;10]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0{,}004\,x(x+12)(x-12)+8$ harmadfokú függvény képének az x tengely körüli megforgatásával jön létre?* (*16 pont*)



Megoldás. *a*)

$$f(x)=0{,}004x(x+12)(x-12)+8=$$

$$=0{,}004(x^3-144x+2000).$$

Használjuk a forgástestekre vonatkozó térfogatképletet: $V = \pi \displaystyle\int_a^b \big[f(x)\big]^2 \,\mathrm{d}x$. Ekkor

$$V = \pi \int_{-10}^{10} \big[0{,}004(x^3 - 144x + 2000)\big]^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{250^2} \int_{-10}^{10} (x^6 + 20\,736x^2 + 4\,000\,000 - 288x^4 + 4000x^3 - 576\,000x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{250^2} \left[\frac{x^7}{7} + 20\,736\frac{x^3}{3} + 4\,000\,000x - 288\frac{x^5}{5} + 4000\frac{x^4}{4} - 576\,000\frac{x^2}{2}\right]_{-10}^{10} =$$

$$= \frac{\pi}{250^2} \left[\frac{x^7}{7} + 6912x^3 + 4 \cdot 10^6 x - \frac{288}{5}x^5 + 10^3 x^4 - 288 \cdot 10^3 x^2\right]_{-10}^{10} =$$

$$= \frac{\pi}{250^2} \left(\frac{10^7}{7} + 6912 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^7 - \frac{288}{5} \cdot 10^5 + 10^7 - 288 \cdot 10^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{10^7}{7} + 6912 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^7 - \frac{288}{5} \cdot 10^5 - 10^7 + 288 \cdot 10^5\right) =$$

$$= \frac{\pi}{250^2} \left(2 \cdot \frac{10^7}{7} + 13824 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^7 - \frac{576}{5} \cdot 10^5\right) \approx 4281.$$