I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:*

$$a)\quad \frac{9}{x^2-16}+\frac{5}{4-x}+\frac{13+x}{x+4}=-\frac{18}{4+x};\qquad b)\quad 2\cos^2 x-3\sin x=0.$$ (*11 pont*)

Megoldás. *a*) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4;4\}$.
Alakítsuk, rendezzük az egyenletet:

$$\frac{9}{x^2-16}-\frac{5}{x-4}+\frac{13+x}{x+4}+\frac{18}{x+4}=0,$$

Szorozzuk mindkét oldalt (x^2-16)-tal:

$$9-5(x+4)+(x+31)(x-4)=0,\quad \text{azaz}\quad x^2+22x-135=0,$$

amiből $x_1=5$, $x_2=-27$.

Az értelmezési tartományon ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, így a kapott két szám valóban megoldása az egyenletnek.

b) Mivel $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ minden valós x esetén, azért az egyenletet

$$2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0$$

alakban is írhatjuk. Ezt rendezve kapjuk:

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0.$$

A másodfokú egyenlet két gyöke $\frac{1}{2}$ és -2. A $\sin x$ nem lehet -2, ezért:

$$\sin x=\frac{1}{2},\qquad x_1=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi,\ k_1\in\mathbb{Z};\qquad x_2=\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi,\ k_2\in\mathbb{Z}.$$

2. *Egy 32 lapos magyar kártyából 2 lapot húzunk. A húzás sorrendjét nem vesszük figyelembe.*
a) *Hány különböző lappárunk lehet?*
b) *Hány olyan lappár van, amelyben van makk?*
c) *A teljes kártyacsomagban hány különböző sorrendben lehetnek a piros lapok?*
d) *Mekkora a valószínűsége annak, hogy a megkevert teljes kártyacsomagban az első két helyen nincs piros lap?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel

$$\binom{32}{2}=\frac{32\cdot 31}{2}=496,$$

azért 496 különböző lappárunk lehet.

b) Egyszerűbb összeszámolni, hogy hány lappár nem tartalmaz makkot. Mivel a 32 lap közül 8 makk, azért a maradék 24-ből választunk ki kettőt, ezt $\binom{24}{2}=276$-féleképpen tehetjük meg. Így azoknak a pároknak a száma, melyekben biztosan van legalább egy makk: $496-276=220$.

c) A 8 különböző piros lap sorrendje 8! lehet.

d) Az összes eset száma: 32! A kedvező esetek száma: $24\cdot 23\cdot 30!$ Vagyis a keresett valószínűség:

$$\frac{24\cdot 23}{32\cdot 31}\approx 0{,}556.$$

3. *Egy vállalatnál jutalomosztáskor a jutalom összegét hat ember között* $1:2:3:4:5:5$ *arányban akarják szétosztani. Időközben kiderült, hogy az egyik dolgozó, aki a pénz 25%-át kapta volna, nem tett eleget a követelményeknek. Ekkor a neki szánt* 225 000 Ft*-ot úgy szerették volna szétosztani az öt ember között, hogy a kiosztott összegek egymás közötti aránya ne változzon meg. Mekkora összeget kap az öt ember külön-külön?* (*14 pont*)

Megoldás. A kiosztandó összeg legyen x Ft. Ezt $1+2+3+4+5+5=20$ részre kellett volna szétosztani, vagyis a dolgozók $\frac{x}{20}$, $\frac{x}{10}$, $\frac{3x}{20}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{4}$ összeget kaptak volna. Tudjuk, hogy $\frac{x}{4}=225\,000$ Ft, azaz a teljes összeg $x=900\,000$ Ft. Az $1:2:3:4:5$ arányokat megtartva az 5 ember esetén 15 részre kell szétosztani ezt az összeget.

Vagyis az emberek $\frac{x}{15}$, $\frac{2x}{15}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{4x}{15}$, $\frac{x}{3}$ összeget fognak kapni, ami 60 000 Ft, 120 000 Ft, 180 000 Ft, 240 000 Ft és 300 000 Ft.

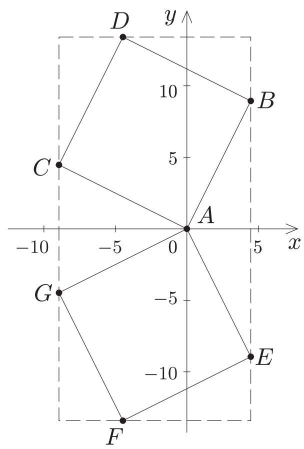
4. *Egy* 10 *egység oldalú négyzet A csúcsa az origó, egyik oldalának meredeksége pedig* 2*. A négyzet az x tengely felett helyezkedik el.*

a) Adjuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit pontosan.

b) Tükrözzük a négyzetet az x tengelyre. Mik lesznek a tükrözött négyzet csúcsainak koordinátái?

c) Mekkora a területe a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú legkisebb téglalapnak, amelyet a két négyzet köré írtunk? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel az AB oldal hossza 10, és az origón átmenő, 2 meredekségű egyenesre illeszkedik, azért a $B(b_1;b_2)$ pont koordinátáira: $b_2=2b_1$. A Pitagorasz-tétellel ezt kifejezve: $10^2=b_1^2+(2b_1)^2$, melyből $b_1=2\sqrt{5}$. A B pont, illetve az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: $\big(2\sqrt{5};4\sqrt{5}\big)$.



Az $\overrightarrow{AC}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, ezért $\overrightarrow{AC}\big(-4\sqrt{5};2\sqrt{5}\big)$. Mivel

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

azért $D\big(-2\sqrt{5};6\sqrt{5}\big)$.

b) Az x tengelyre tükrözéskor csak a második koordináták előjelét kell megváltoztatnunk:

$$E\big(2\sqrt{5};-4\sqrt{5}\big);\quad F\big(-2\sqrt{5};-6\sqrt{5}\big);\quad G\big(-4\sqrt{5};-2\sqrt{5}\big).$$

c) A téglalap méreteit a két négyzet csúcspontjainak koordinátáiból kapjuk. Az x tengely irányú oldal hossza $6\sqrt{5}$, míg az y tengely irányú oldal hossza $12\sqrt{5}$.

A téglalap területe: $T=6\sqrt{5}\cdot 12\sqrt{5}=360$.

II. rész

5. *Adott egy O középpontú* 5 cm *sugarú kör. Legyen a kör AB átmérőjének B ponton túli meghosszabbításán B-től* 5 cm*-re a C pont. Ebből a pontból húzzunk érintőt a körhöz, ezen az érintési pont legyen E.*

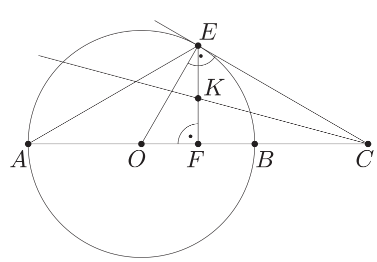
a) Igazoljuk, hogy az ACE háromszög egyenlő szárú.

b) Számítsuk ki az ACE háromszög oldalainak hosszát, szögeinek nagyságát.

c) Mekkora az ACE háromszög területe?

d) Számítsuk ki az ACE háromszögbe írható kör sugarának a pontos értékét. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A feladat szövege alapján *vázlatot* készítünk.



Mivel $CE \perp OE$, azért OCE háromszög derékszögű, valamint 30° és 60° a két hegyesszögének nagysága, hiszen a rövidebb befogó az átfogó fele ($OE = 5$ cm, $OC = 10$ cm). A $COE\sphericalangle = 60^\circ$-os középponti szög, így a hozzátartozó kerületi szög ennek fele: $OAE\sphericalangle = 30^\circ$. A keletkezett háromszögnek van két egyenlő szöge, így a kérdéses háromszög valóban egyenlő szárú.

b) Ha két szöge 30°-os, akkor a szárszög 120°-os. A háromszög alapja $AC = 15$, míg a szárai az OCE derékszögű háromszögből adódóan, ennek hosszabbik befogójával azonos hosszúságúak. Ez a CE befogó az átfogó $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szöröse, vagyis a szárak hossza

$$AE = CE = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}7.$$

ACE háromszög szögei: 30°, 30°, 120°, az alapja 15 cm, a szárai kb. 8,7 cm.

c) Számítsuk ki az AC oldalhoz tartozó magasságot: $EF \perp AC$ és F felezőpontja az alapnak. Vagyis az EFC háromszög is 30°, 60°-os derékszögű háromszög, melynek a rövidebb befogója a keresett magasság, aminek nagysága a szár felével egyenlő.

$$t = \frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \approx 32{,}5.$$

A keresett terület kb. $32{,}5\ \text{cm}^2$.

d) Tudjuk, hogy a beírható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja, ezért a C csúcsból induló szögfelező az EF magassággal, mint szögfelezővel kimetszi a beírható kör K középpontját. Ekkor a KFC háromszög 15°-os derékszögű háromszög, melynek KF befogója a keresett sugár, azaz $KF = FC \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$. Az addíciós tételek segítségével számíthatunk pontos értéket:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}.$$

Behelyettesítve az ismert értékeket, majd gyöktelenítve:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

A keresett sugár hossza tehát pontosan $7{,}5\left(2 - \sqrt{3}\right)$ cm.

6. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet:* $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 384.$

b) *Van-e valós megoldása a* $2\log_{\frac{1}{4}} 3x - \log_{\frac{1}{4}}(x-1) = a$ *egyenletnek, ha az a paraméter nemnegatív valós szám?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Tudjuk, hogy $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x}$ a hatványozás azonosságai miatt. Tudjuk továbbá, hogy

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\right)^2.$$

Az eredeti egyenletben $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$ helyett y-t írva másodfokú egyenletet kapunk:

$$2y^2 - 8y - 384 = 0,$$

melynek két gyöke $y_1 = 16$ és $y_2 = -12$.

Csak az $\left(\frac{1}{8}\right)^{x} = 16$ felel meg. Ezt átírva kapjuk: $2^{-3x} = 2^4$.

Innen $x = -\frac{4}{3}$. Ellenőrizve ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

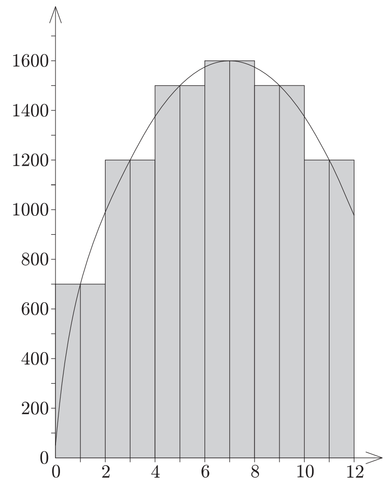
b) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 1$. Az egyenlet a következő alakban is írható:

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{9x^2}{x-1} = a, \quad \text{azaz} \quad \frac{9x^2}{x-1} = \frac{1}{4^a}.$$

Ezt tovább alakítva: $4^a \cdot 9x^2 - x + 1 = 0$. Az így kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = 1 - 36 \cdot 4^a$, ami $a \geq 0$ esetén negatív.

Vagyis a feltételek mellett nincs valós megoldása az egyenletnek.

7. *Az* ábrán *egy útszakaszon éjféltől délig elvégzett forgalomszámlálás eredményét látjuk. A vízszintes tengelyen az órákat, a függőlegesen százasokra kerekítve az elhaladó kocsik számát ábrázoltuk.*



A forgalomszámláló kétóránként összesítette az ott elhaladó járműveket, és az így kapott adatokat egy-egy órára átlagolva oszlopdiagramon ábrázolta. (Az oszlopok területének mérőszáma az adott időintervallumban elhaladó kocsik számát adja.) Az ábrázolás után észrevette, hogy az egymás mellett fekvő azonos magasságú oszlopok felső vízszintes szakaszainak hat felezőpontja illeszkedik egy parabolára (lásd az ábrán*). Szerinte ez a parabola valóságosabban mutatja az adott útszakasz forgalmának változását a megadott időben.*

a) Hány autó haladt el a vizsgált útszakaszon az adott időben a diagram szerint?

b) Ha az autók számát nem az előbbi módon számoljuk, hanem a parabola alatti területtel közelítjük, akkor mit kapunk eredményül? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az *ábráról* leolvasható, hogy a kétórás intervallumokban óránként hány autót számolt össze, ezeket összegezve:

$$2 \cdot 700 + 2 \cdot 2 \cdot 1200 + 2 \cdot 2 \cdot 1500 + 2 \cdot 1600 = 15\,400$$

jármű haladt el a forgalomszámláló előtt.

b) A parabola alatti terület adja meg a keresett számot, így tehát a parabolát leíró függvényutasítást kell leolvasni a grafikonról. A parabola lefelé nyitott, maximum pontjának koordinátái $(7; 1600)$. Ezért a függvényutasítást $x \mapsto -a \cdot (x-7)^2 + 1600$ alakban keressük, ahol az a paraméter értékét a parabola bármely pontjának koordinátáival számolhatjuk, például $C_1(3; 1200)$-at behelyettesítve: $3 \mapsto 1200 = -a \cdot (3-7)^2 + 1600$. Ezt kiszámolva $a = 25$-nek adódik. Így a parabola egyenlete a négyzetre emelést elvégezve $y = -25\,x^2 + 350\,x + 375$ lesz.

Számoljuk ki a parabola alatti területet:

$$\int_0^{12} (-25\,x^2 + 350\,x + 375) = \left[-25 \cdot \frac{x^3}{3} + 350 \cdot \frac{x^2}{2} + 375\,x\right]_0^{12} = 15\,300.$$

Tehát 15 300 db autó haladt volna át az adott helyen.

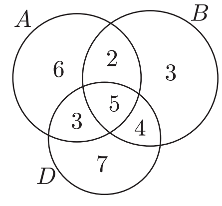
8. *Egy matematika versenyen* 30 *feladatot tűztek ki. András jó megoldásainak száma* 16, *míg Balázsé* 14. *Megállapították, hogy* 7 *olyan feladat volt, amelyiket mindketten jól oldottak meg.*

a) Hány olyan feladat volt, amelyikkel egyikőjük sem boldogult?

b) Dénes, aki szintén részt vett a versenyen, megállapította, hogy 5 *olyan feladat van, melyeket mindhárman jól megoldottak. Dénes egyeztette megoldásait Andrással, majd Balázzsal, rájöttek, hogy Andrással* 8, *Balázzsal* 9 *közös jó megoldásuk van. Végül azt is észrevették, hogy mindegyik feladatra legalább az egyikőjük jó megoldást adott. Kinek lett közülük a legtöbb jó megoldása?*

c) Véletlenszerűen kiválasztunk a 30 *feladatból egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy pont ketten adtak rá jó megoldást?* (*16 pont*)

Megoldás. Készítsünk Venn-diagrammot! Az *ábráról* leolvashatók a válaszok.



a) 7 olyan feladat volt, amelyet sem András, sem Balázs nem oldott meg.
b) Dénes oldotta meg a legtöbb feladatot, összesen 19-et.
c) Pontosan két jó megoldást $2+3+4=9$ feladatra adtak.

A keresett valószínűség: $P=\dfrac{9}{30}=0{,}3$.

9. *Az $x^2+(3p-2)x-(7p+2)=0$ egyenlet két gyöke nem negatív, akkor tekintsük úgy a két számot, mintha egy-egy kocka élének a hosszát jelentené. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a felszínösszeg minimális legyen.* (*16 pont*)

Megoldás. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy van-e az eredeti másodfokú egyenletnek megoldása, vagyis vizsgáljuk meg, hogy $D\ge 0$ mely p paraméter értékek esetén teljesül.

$$D=(3p-2)^2+4(7p+2)=9p^2+16p+12=\left(3p+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{44}{9},$$

amiről látszik, hogy p bármely értékére pozitív, vagyis az eredeti másodfokú egyenletnek mindig van két megoldása.

Második lépésként vizsgáljuk meg, hogy milyen p esetén lesz mindkét gyök nem negatív. Ehhez az $x_1+x_2=-(3p-2)\ge 0$ és $x_1x_2=-(7p+2)\ge 0$ feltételeknek kell teljesülni, azaz $p\le -\dfrac{2}{7}$.

A kockák felszínösszege: $A_1+A_2=6x_1^2+6x_2^2=6\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]$, melyből a Viète-formulák felhasználásával a következő kifejezést kapjuk:

$$A_1+A_2=6\left[(3p-2)^2+2(7p+2)\right]=6[9p^2+2p+8]=6\left[\left(3p+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{71}{9}\right].$$

Ez $p=-\dfrac{1}{9}$ esetén lenne minimális, de most tudjuk, hogy $p\le -\dfrac{2}{7}$.

A másodfokú függvény tulajdonságainak ismeretében a keresett szám: $p=-\dfrac{2}{7}$.