

## I. rész

1. Két konvex sokszög belső szögösszegének különbsége megegyezik egy hétszög belső szögösszegével, és egyiküknek kétszer annyi csúcsa van, mint ahány oldala a másiknak. Hány átlójuk van összesen?

**Megoldás.** A két sokszög csúcsainak száma legyen  $n$  és  $m$ . Ekkor a belső szögek összege  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , illetve  $(m - 2) \cdot 180^\circ$ . Ezek különbsége egy hétszög belső szögösszegével egyezik meg, azaz  $(n - m) \cdot 180^\circ = (7 - 2) \cdot 180^\circ$ , ahonnan az  $n - m = 5$  összefüggést kapjuk. Tudjuk, hogy az egyiknek kétszer annyi csúcsa van, mint ahány oldala a másiknak, de egy sokszögnek ugyanannyi csúcsa van, mint oldala, ezért  $2m = n$ . Az egyenletrendszerből kapjuk:  $n = 10$  és  $m = 5$ .

Az átlók száma:  $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$ , illetve  $\frac{m(m-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2} = 5$ . Vagyis összesen 40 átlójuk van.

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív egész szám párok halmazán:

$$x^{y^2-15y+56} = 1,$$

$$y - x = 5.$$

**Megoldás.** Az első egyenlet teljesüléséhez vagy az  $y^2 - 15y + 56$ -nak kell 0-nak lennie, amiből az  $y^2 - 15y + 56 = (y-7)(y-8)$  miatt  $y = 8$  vagy  $y = 7$ ; vagy az  $x$ -nek kell 1-nek lennie. A második egyenlettel összevetve az eredményeket három számpár elégti ki az egyenletrendszert:  $(3; 8)$ ,  $(2; 7)$ ,  $(1; 6)$ .

3. A  $k^2(2 + 4x) - x(x + 1 + k) + 3(x - 2)(2k + 1) - (1 - x)(k + 3) = 0$  egyenlet gyökei  $x_1 = 1$  és  $x_2 = 2$ . Adjuk meg  $k$  értékét.

**Megoldás.** Ha  $x_1 = 1$ , akkor ezt az egyenletbe helyettesítve 0-t kell kapnunk:

$$k^2(2 + 4) - (1 + 1 + k) + 3(1 - 2)(2k + 1) - (1 - 1)(k + 3) = 0,$$

rendezve:  $6k^2 - 7k - 5 = 0$ , ennek megoldásai:  $k_1 = \frac{5}{3}$ ,  $k_2 = -\frac{1}{2}$ .

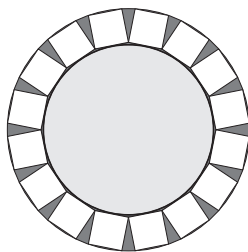
Hasonlóan, ha  $x_2 = 2$ , akkor

$$k^2(2 + 8) - 2(2 + 1 + k) + 3(2 - 2)(2k + 1) - (1 - 2)(k + 3) = 0,$$

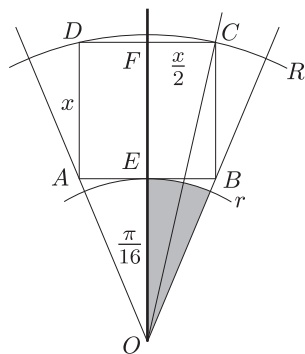
rendezve:  $10k^2 - k - 3 = 0$ , ennek megoldásai:  $k_1 = \frac{3}{5}$ ,  $k_2 = -\frac{1}{2}$ .

Mivel mind a két feltételnek teljesülnie kell, azért  $k = -\frac{1}{2}$ .

4. Egy teázóban úgy szolgálják fel a teát, hogy a csésze 16 db kockacukorral az ábrán látható módon körberakható (a szomszédos kockacukrok csúcsai összeérnek, egy-egy oldalukkal érintik a csészét, két-két csúcsuk pedig a csészéalj peremén van). Hány cm a kockacukor éle, illetve a csésze sugara, ha a csészéalj átmérője 10 cm?



**Megoldás.** Egy kockacukorhoz  $\frac{2\pi}{16}$  nagyságú középponti szög tartozik. Ezt megfelelően és az  $OC$  sugarat berajzolva az  $AOE$  derékszögű háromszögben  $r = \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{16}\right)$ , az  $OCF$  derékszögű háromszögben pedig  $R^2 = (x + r)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$ .



Ebben az egyenletben  $R = 5$  és  $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{16}\right) \approx 5$  alapján  $r \approx \frac{5}{2}x$ . A következő „egyenletet” kapjuk:

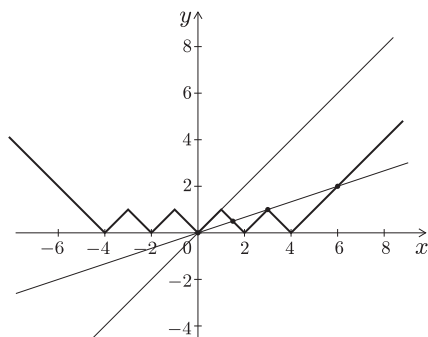
$$25 \approx \left(x + \frac{5}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

ahonnan  $x \approx \sqrt{2}$ , azaz a kockacukor éle kb. 1,4 cm, a csésze átmérője kb. 7 cm.

## II. rész

5. Hány megoldása van az  $\left|\left|\left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 1\right| - 1\right| - 1\right| = \frac{kx}{7}$  egyenletnek a pozitív egész  $k$  értékétől függően?

**Megoldás.** Készítsünk vázlatrajzot az  $f(x) = \left|\left|\left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 1\right| - 1\right| - 1\right|$  függvényről:



Az  $f(x)$  függvénynek az 1 meredekségű egyenessel végtelen sok közös pontja, az  $\frac{1}{3}$  meredekségű egyenessel 4 közös pontja van, és ezek a „választóvonalak”.

Ha  $k > 7$ , akkor egy, ha  $k = 7$ , akkor végtelen sok, ha  $k \in \{6; 5; 4; 3\}$ , akkor három, és ha  $k \in \{2; 1\}$ , akkor öt megoldása van az egyenletnek.

6. Adott a 10 egység oldalú  $ABCD$  rombusz. Az  $A$  középpontú,  $C$  csúcson áthaladó kört belülről érinti a  $B$  középpontú,  $D$  csúcson áthaladó kör. Határozzuk meg a rombusz területét.

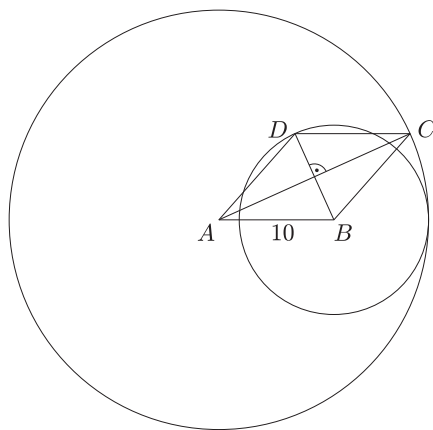
**Megoldás.** Legyen a nagyobbik kör sugara, ami egyben a hosszabbik átló a rombuszban  $R$ , és a kisebbik kör sugara, amely a rövidebbik átló,  $r$ . Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\frac{R^2}{4} + \frac{r^2}{4} = 100.$$

Mivel pedig a két kör érinti egymást:  $R - r = 10$ . A két összefüggésből a

$$2r^2 + 20r - 300 = 0$$

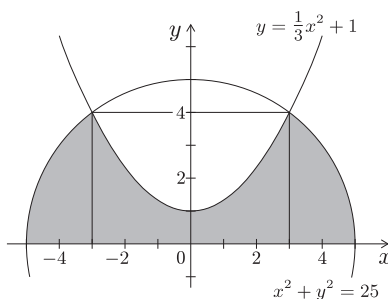
másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pozitív gyöke  $r = 5\sqrt{7} - 5$ , amiből  $R = 5\sqrt{7} + 5$ .



A rombusz területe:

$$t = \frac{Rr}{2} = \frac{(5\sqrt{7} - 5)(5\sqrt{7} + 5)}{2} = 75.$$

7. Az  $x^2 + y^2 = 25$  egyenletű kör, az  $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$  egyenletű parabola és az abszcisszatengely egy síkidomot határoznak meg, amelyet megforgatunk az abszcisszatengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?



**Megoldás.** Határozzuk meg a parabola és a kör metszéspontjainak koordinátáit. A két egyenletből a metszéspontok:  $A(-3; 4)$  és  $B(3; 4)$ . A keletkezett forgástest térfogata:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left[ \int_0^3 \left( \frac{1}{3}x^2 + 1 \right)^2 dx + \int_3^5 (25 - x^2) dx \right] = \\ &= 2\pi \left[ \int_0^3 \left( \frac{x^4}{9} + \frac{2x^2}{3} + 1 \right) dx + \int_3^5 (25 - x^2) dx \right] = \\ &= 2\pi \left[ \frac{x^5}{45} + \frac{2x^3}{9} + x \right]_0^3 + 2\pi \left[ 25x - \frac{x^3}{3} \right]_3^5 = \frac{144}{5}\pi + \frac{104}{3}\pi = \frac{952}{15}\pi \approx 199,4. \end{aligned}$$

8. Egy cég golyó alakú, tömör rágógumit gyártott, és darabját 10 forintért adta el. Az alapanyagok drágulása miatt az előállítási költség 300%-kal növekedett. A gyártó szeretné, ha a rágógumik eladása utáni nyereség és az előállítási költség aránya nem változna, ezért a rágógumi darabárát 20 forintra emelte. A terméket is átalakították: a 2 cm átmérőjű gömb alakú rágógumik belseje egy koncentrikus gömb alakú üreget is tartalmaz. Számoljuk ki az új rágógumi falának vastagságát.

**Megoldás.** Legyen a régi fajta rágógumi előállítási költsége  $x$  Ft, és legyen az új és a régi rágógumi mennyiségének (tömegének) aránya  $y$  ( $x, y \neq 0$ ). Ekkor a következő táblázatot készíthetjük:

	Régi fajta	Új fajta
Az előállítás költsége (Ft)	$x$	$4xy$
Az eladási ár (Ft)	10	20
Nyereség darabonként (Ft)	$10 - x$	$20 - 4xy$
Arány	$\frac{10 - x}{x}$	$\frac{20 - 4xy}{4xy}$

Mivel az előállítás után a nyereség/költség arány nem változott, azért:

$$\frac{10-x}{x} = \frac{20-4xy}{4xy}, \quad \text{ahonnan} \quad y = \frac{1}{2}.$$

Az új rágógumi anyagfelhasználása fele a régiének, a belsejében lévő üres gömb sugara  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ . Így a rágógumi falának vastagsága  $1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,2$  cm.

9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

$$a) \quad \begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{x-5} - 1 = 7x - x^2 - 2xy, \\ \log_5 64^x \cdot \log_4 125^y = 45. \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} xy + y = 2, \\ (1-y) \cdot 2 \cos \frac{x \cdot \pi}{3} = \frac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

**Megoldás.** a) A feladatban  $x \geq 5$ -nek teljesülni kell. A második egyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\log_5 64^x \cdot \log_4 125^y = \log_5 4^{3x} \cdot \log_4 5^{3y} = 3x \cdot \log_5 4 \cdot 3y \cdot \log_4 5 = 9xy \cdot \underbrace{\log_5 4 \cdot \log_4 5}_1 = 9xy,$$

ahonnan  $xy = 5$ .

Az első egyenletbe behelyettesítve:

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-5} - 1 = 7x - x^2 - 10 = (x-5)(2-x).$$

A kikötések miatt  $x \geq 5$ . A bal oldal szigorúan monoton nő, nem negatív és csak  $x = 5$ -nél egyenlő 0-val.

A jobb oldal  $x \geq 5$  esetén nem pozitív, és  $x = 5$  esetén 0. Így csak az  $x = 5$  megoldás. Az egyenletrendszer megoldása:  $(5; 1)$ .

b) Az  $x = -1$  jól láthatóan nem megoldás.

Ha  $x \neq -1$ , akkor az első egyenletből:  $y = \frac{2}{x+1}$ . A második egyenletbe beírva:

$$\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \cdot 2 \cos \frac{x \cdot \pi}{3} = \frac{x-1}{x+1}.$$

A bal oldalt tovább alakítva:

$$\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right) \cdot 2 \cos \frac{x \cdot \pi}{3} = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \cos \frac{x \cdot \pi}{3}.$$

A  $2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \cos \frac{x \cdot \pi}{3} - \frac{x-1}{x+1} = 0$  egyenletet kell megoldanunk. Szorzattá alakítva:  $\frac{x-1}{x+1} \left(2 \cos \frac{x \cdot \pi}{3} - 1\right) = 0$ .

Innen kapjuk, hogy  $x = 1$ , illetve  $\cos \frac{x \cdot \pi}{3} = \frac{1}{2}$ .

Mivel

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \cos \pi \left(\frac{1+6k}{3}\right), \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2l\pi\right) = \cos \pi \left(\frac{5+6l}{3}\right),$$

ezért a két megoldáscsoport  $x = 6k + 1$ , illetve  $x = 6l + 5$ , ahol  $k, l \in \mathbb{Z}$ , és ebben az  $x = 1$  is benne van.

A megoldások:  $\left(6k + 1; \frac{1}{3k+1}\right)$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}$ , illetve  $\left(6l + 5; \frac{1}{3l+3}\right)$ , ahol  $l \in \mathbb{Z}$ .