

I. rész

1. a) Van-e megoldása a következő egyenletnek a pozitív egész számok halmazán?

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = 2y.$$

b) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha}.$$

Megoldás. a) A feladat feltételéből következően x és y csak pozitív egész lehet. $1! = 1$, $n \geq 2$ esetén $n!$ páros, mert tartalmazza a 2-t szorzótényezőként. A bal oldali összeg tehát páratlan, a jobb oldal értéke viszont páros, az egyenletnek nincs megoldása.

b) A nevezőben nem lehet 0, vagyis $\cos \alpha \neq 0$. Mindkét oldalt $\cos \alpha$ -val szorozva és 2-vel osztva az $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alakhoz jutunk. Felhasználva, hogy $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ és $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a $\sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alak adódik, amit az addíciós tétel felhasználásával a $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alakra hozhatunk.

A megoldások: $\alpha_1 = -\frac{\pi}{12} + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

2. Sanyi félévi bizonyítványát mutatja a táblázat.

magyar irodalom	5 (jeles)
magyar nyelv	4 (jó)
történelem	4 (jó)
matematika	3 (közepes)
angol nyelv	4 (jó)
német nyelv	3 (közepes)
fizika	2 (elégséges)
kémia	3 (közepes)
biológia	2 (elégséges)
rajz	4 (jó)
ének-zene	5 (jeles)
testnevelés	5 (jeles)

a) Adjuk meg Sanyi jegyeinek móduszát, mediánját és terjedelmét.

b) Számítsuk ki Sanyi tanulmányi átlagát (a jegyek számtani közepét).

c) Adjuk meg az érdemjegyek szórását.

d) Ábrázoljuk a jegyek százalékos eloszlását kördiagramon.

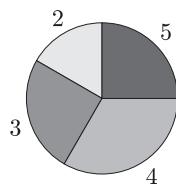
Megoldás. a) módusz: 4, medián: 4, terjedelem: 3.

b) átlag: 3,667.

c) szórás: 1,027.

d) a jegyek

25%-a	5-ös,
33,33%-a	4-es,
25%-a	3-as,
16,67%-a	2-es.



A jegyek eloszlása

3. Melyek azok az x pozitív egész számok, amelyekre igaz, hogy $x^4 + 4$ prímszám?

Megoldás. $x^4 + 4$ egész együtthatós polinomok szorzatává alakítható:

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

Mivel x pozitív egész, a tényezők egészek és $0 < x^2 - 2x + 2 < x^2 + 2x + 2$. A szorzat csak úgy lehet prím, ha a kisebbik tényező értéke 1, a nagyobbik pedig prím. Ha $x^2 - 2x + 2 = 1$, akkor $x = 1$. Ebben az esetben a kifejezés értéke 5, valóban prím.

Csak $x = 1$ esetén lesz $x^4 + 4$ ($= 5$) prímszám.

4. Egy mértani sorozat első és harmadik elemének az összege 40. Ha az első elemhez 4-et, a második elemhez pedig 6-ot adunk, akkor a harmadik elemmel együtt ugyanilyen sorrendben egy számtani sorozat három szomszédos eleméhez jutunk. Melyik ez a mértani sorozat?

Megoldás. A szokott módon jelöljük a mértani sorozat elemeit: a_1, a_1q, a_1q^2 , a számtani sorozat három szomszédos eleme ekkor az $a_1 + 4, a_1q + 6, a_1q^2$ alakot ölti.

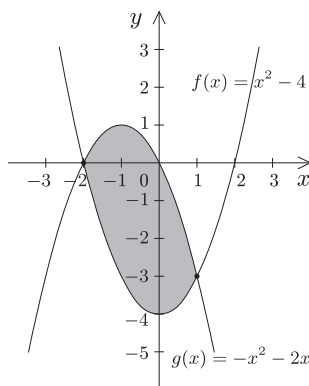
Az $a_1 + a_1q^2 = 40$ egyenlet mellett felírható az $(a_1q + 6) - (a_1 + 4) = a_1q^2 - (a_1q + 6)$ egyenlet is. Az így kapott egyenletrendszer mindkét egyenletéből kifejezzük az a_1 -et ($q \neq 1$), ekkor kapjuk: $\frac{5}{1+q^2} = \frac{1}{(q-1)^2}$.

Ebből két megoldást kapunk: $q = 2, a_1 = 8$, valamint $q = 0,5, a_1 = 32$. Mindkettő megoldása a feladatnak.

II. rész

5. Milyen arányban osztja az y tengely az $f(x) = x^2 - 4$ és a $g(x) = -x^2 - 2x$ függvények görbéi által határolt területet?

Megoldás. A két függvény metszéspontjainak abszcisszái: $x_1 = -2, x_2 = 1$.



A $(-2; 1)$ intervallumban a két függvény különbsége állandó előjelű, így a szóban forgó területek aránya

$$\lambda = \frac{\int_{-2}^0 f(x) - g(x) dx}{\int_0^1 f(x) - g(x) dx},$$

$$\int f(x) - g(x) dx = \int 2x^2 + 2x - 4 dx = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + c.$$

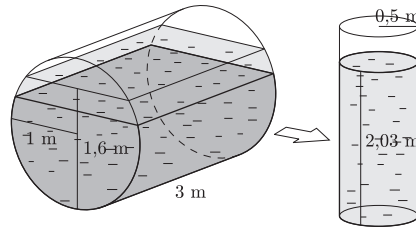
Belyettesítve:

$$\left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x \right]_{-2}^0 = -\frac{20}{3} \quad \text{és} \quad \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x \right]_0^1 = -\frac{7}{3}.$$

(Innen az is látszik, hogy a $(-2; 1)$ intervallumon $f(x) < g(x)$.) A területek aránya tehát

$$\lambda = \left(-\frac{20}{3} \right) : \left(-\frac{7}{3} \right) = \frac{20}{7}.$$

6. Egy henger alakú fekvő tartály alapkörének a sugara 1 m, a henger alkotója 3 m. A tartályban a víz magassága jelenleg 1,6 m. A víz egy részét kiengedjük egy elegendően nagy térfogatú, álló henger alakú edénybe. Az edény alapkörének sugara 0,5 m. Milyen magas lesz ebben az edényben a vízszint, ha a fekvő hengerben 0,3 m-t süllyedt a víz magassága?



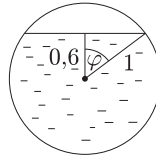
Megoldás. Számoljuk ki a fekvő henger kezdeti víztartalmát:

$$\cos \varphi = \frac{0,6}{1}, \quad \varphi \approx 53,13^\circ.$$

$$T_{\text{körszelet}} = \frac{2\varphi}{360^\circ} \cdot r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\varphi \approx 0,9273 - 0,4800 = 0,4473 \text{ m}^2.$$

$$T_1 = r^2 \pi - T_{\text{körszelet}} \approx 3,1416 - 0,4473 = 2,6943 \text{ m}^2.$$

$$V_1 = T_1 d \approx 8,083 \text{ m}^3.$$



A fekvő hengerben maradt víz térfogatának kiszámítása:

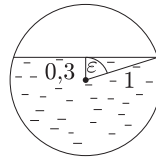
$$\cos \varepsilon = \frac{0,3}{1}, \quad \varepsilon \approx 72,54^\circ.$$

$$T_{\text{körszelet}_2} = \frac{2\varepsilon}{360} \cdot r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\varepsilon \approx 1,2661 - 0,2862 = 0,9799 \text{ m}^2.$$

$$T_2 = r^2 \pi - T_{\text{körszelet}_2} \approx 3,1416 - 0,9799 \approx 2,1617 \text{ m}^2.$$

$$V_2 = T_2 d \approx 6,4851 \text{ m}^3.$$

A fekvő hengerből kifolyt víz térfogata: $V \approx 1,5978 \text{ m}^3$.



Az álló hengerben a vízmagasság kiszámítása:

$$V_{\text{henger}} = r^2 \pi \cdot m, \quad \text{vagyis} \quad 1,598 \approx 0,25 \cdot 3,14 \cdot m,$$

amiből $m \approx 2,03 \text{ m}$.

Tehát körülbelül 2 méter magasban áll majd a víz a második hengerben.

7. Egy üzem azt a megrendelést kapta, hogy készítsen el 100 db 1 dm^3 térfogatú felül nyitott kúp alakú fagyalttölcsért. Az alapanyag drága, a megrendelő pedig csak a kúp térfogatát írta elő. Milyen nyílásszögű kúp esetén lesz minimális az anyagköltség?

Megoldás. A kúp térfogata: $\frac{r^2 \pi \cdot m}{3} = 1000 \text{ cm}^3$. A kúp alkotója a sugárral és a magassággal kifejezve: $a = \sqrt{r^2 + m^2}$. A kúppalást felszíne: $A_{\text{palást}} = r \cdot \pi \cdot a$.

Kell, hogy

$$A = r\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{3000}{r^2 \pi}\right)^2} = \pi \sqrt{r^4 + \frac{9\,000\,000}{r^2 \pi^2}}$$

minimális legyen. Elég megkeresni az $r^4 + \frac{9\,000\,000}{r^2\pi^2}$ kifejezés minimumát. A deriváltat egyenlővé téve 0-val:

$$\left[r^4 + \frac{9\,000\,000}{r^2\pi^2} \right]' = 4r^3 + \frac{-2r\pi^2 \cdot 9\,000\,000}{r^4\pi^4} = 0,$$

ahonnan $4r^3 = \frac{2\pi^2 \cdot 9\,000\,000}{r^3\pi^4}$, vagyis $r^6 = \frac{18\,000\,000}{4\pi^2} \approx 455\,945,33$. $r \approx 8,773$ cm adódik.

A második deriváltat vizsgálva az $r = 8,773$ helyen:

$$\left[4r^3 - \frac{2r\pi^2 \cdot 9\,000\,000}{r^4\pi^4} \right]' = \left[4r^3 - \frac{18\,000\,000}{r^3\pi^2} \right]' = 12r^2 - \frac{-18\,000\,000 \cdot 3r^2\pi^2}{r^6\pi^4} > 0.$$

A palást felszíne minimális, ha $r \approx 8,773$ cm. Ekkor $m \approx 12,407$ cm, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{m}$, ahonnan a keresett nyílásszög $\varphi \approx 70,53^\circ$.

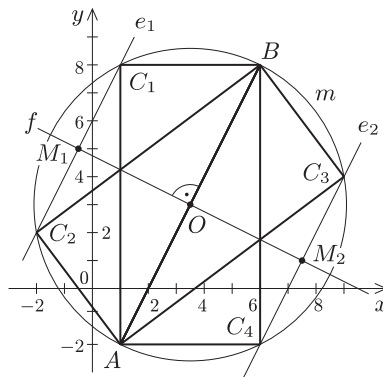
8. Hol lehet annak a derékszögű háromszögnek a derékszögű csúcsa, melynek területe 25 egység, és az átfogójának a két végpontja $A(1; -2)$ és $B(6; 8)$?

Megoldás. Az ilyen derékszögű háromszög harmadik csúcsa az AB szakasz Thalész-körének és az AB egyenesétől $2\sqrt{5}$ egységre haladó, AB -vel párhuzamos e_1 és e_2 egyeneseknek a metszéspontja lesz.

Ugyanis az AB szakasz hossza: $d_{AB} = \sqrt{(6-1)^2 + (8-(-2))^2} = \sqrt{125}$. A háromszög területe: $T = d_{AB} \cdot m \cdot \frac{1}{2}$. Ezekből adódik, hogy $2\sqrt{5} = m$.

A Thalész-kör egyenlete: $(x - 3,5)^2 + (y - 3)^2 = \frac{125}{4}$.

Az e_1 és e_2 egyenesek egy irányvektora: $\overrightarrow{AB}(5; 10)$. Egy normálvektoruk: $\mathbf{n}_{e_1} = \mathbf{n}_{e_2}(-10; 5)$. Állítsunk az AB -re O -ban egy f merőleges egyenest. Az f egyenes egyenlete: $x + 2y = 9,5$. Ezt elmetiszve az O középpontú m sugarú körrel, melynek egyenlete $(x - 3,5)^2 + (y - 3)^2 = 20$, e_1 , illetve e_2 egy-egy pontját kapjuk: $M_1(-0,5; 5)$, $M_2(7,5; 1)$.



e_1 egyenlete: $-2x + y = 6$, e_2 egyenlete: $-2x + y = -14$. A feladatnak négy megoldása van: e_1 és a Thalész-kör metszéspontjai: $C_1(1; 8)$, $C_2(-2; 2)$; e_2 és a Thalész-kör metszéspontjai: $C_3(9; 4)$, $C_4(6; -2)$.

9. a) Van-e egy 25 fős társaságban 3 olyan ember, akik ugyanabban a hónapban születtek? Indokoljuk a választ.

b) Az egyjegyű pozitív egész számok halmazából kiválasztunk egy tetszőleges részhalmazt. Mi a valószínűsége, hogy ebben az 1 vagy a 2 benne van?

c) Az egyjegyű pozitív egész számok halmazából maximum hány olyan részhalmazt tudunk kiválasztani, amelyek közül bármely kettőnek van közös eleme?

Megoldás. a) A skatulya-elv szerint lesz legalább 1 olyan hónap, amikor legalább három ember született, hiszen $2 \cdot 12 = 24 < 25$. Az e hónapban születettek közül bármely három megfelelő.

b) A halmaz elemei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ez egy kilencelemű halmaz, tehát az összes részhalmazainak száma 2^9 . Azon részhalmazok száma, melyekben sem az 1, sem a 2 nem szerepel 2^7 . A keresett valószínűség: $P = 1 - \frac{2^7}{2^9} = \frac{3}{4}$.

c) Válasz: 2^8 . Az olyan részhalmazok száma, amelyekben pl. az 1 benne van, 2^8 , tehát 2^8 db a feltételeknek megfelelő részhalmazt biztosan ki tudunk választani. Minden egyes részhalmaz kiválasztásakor egyúttal a komplementerét is „kiválasztjuk”, vagyis mondhatjuk, hogy a részhalmazok halmaza részhalmaz és komplementer részhalmaz típusú párokba rendezhető. Mivel a párok száma az összes részhalmazok számának a fele, 2^8 , azért ennél több részhalmaz között már van ilyen – részhalmaz és komplementer részhalmaz – páros. Ezeknek nincs közös elemük, tehát $2^8 + 1$ db a feltételeknek megfelelő részhalmaz nem választható ki.