

I. rész

1. a) Egy urnában 100 cédula van 1-től 100-ig megszámozva. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre két cédulát kihúzva ikerprím��számok lesznek a cédulákon? (Ikerprím két olyan príműszám, amelyek a természetes számok sorozatában egymás után következő páratlan számok.)

b) Mennyi a valószínűsége a „hármás iker” húzásának, ha három cédulát húzunk ki egyszerre? (11 pont)

2. Osztható-e a $\binom{38}{19}$ binomiális együttható 17-tel? (12 pont)

3. Az

$$x^2 + y^2 + kx - \frac{k^2}{2}y + 1 = 0$$

kör egyenletében határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy a kör mindkét koordináta-tengelyt érintse. (14 pont)

4. a) Oldjuk meg az $[x]^2 + 3 \cdot [x] - 10 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán. (Az $[x]$ az x -nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelenti.)

b) Milyen p és q egész számok esetén elégíti ki egyetlen egység hosszúságú számköz az $[x]^2 + p[x] + q = 0$ egyenletet? (14 pont)

II. rész

5. Határozzuk meg az $x^3 + (3 - 2a)x^2 - a^2x - 3a^2 + 2a^3 = 0$ egyenletben az a valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet valós gyökei valamilyen sorrendben mértani sorozatot alkossanak. (16 pont)

6. Egy szabályos sokszögben A , B , C és D a sokszög négy egymás utáni csúcsa, az AC szakasz négyzetes közepe az AB és AD szakaszoknak. Hány oldalú a sokszög? (16 pont)

7. a) Oldjuk meg a

$$2x^2 - \left[2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] x + \sin 2\alpha = 0$$

egyenletet, ahol az α valós paraméter.

b) Mutassuk meg, hogy az $f(\alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény a $g(\alpha) = \cos^2 \alpha$ hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény transzformáltja. (16 pont)

8. a) Mutassuk meg, hogy az $y = x^3 + ax^2 + (2a - 3)x + a - 2$ görbesereg minden tagja egy ponton megy át, ahol a tetszőleges valós szám. Adjuk meg ennek a fix pontnak a koordinátáit.

b) Hogyan kell megválasztani az a paraméter értékét, hogy a hozzá tartozó görbe $x_0 = 2$ pontjában húzott érintője áthaladjon a $P(-1; 0)$ ponton? (16 pont)

9. a) Határozzuk meg az a paraméter értékét, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1}\right) = 0,$$

ahol $f(x) = ax^2 - 3x + 2$.

b) Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 3x + 2$ hozzárendeléssel megadott függvény grafikonja és az x tengely által meghatározott síkidom területét. (16 pont)