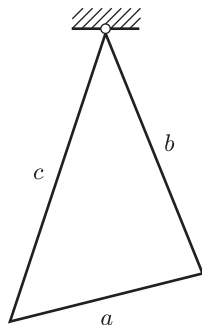


Lapunkban korábban (lásd a 2002. évi 5. szám 229. old.) már foglalkoztunk az „egydimenziós háromszögek” (vagyis a háromszög oldalai mentén koncentrált tömegeloszlású testek) súlypontjának meghatározásával. Az ott közöltek alkalmazásaként az alábbiakban az ilyen háromszögből készült fizikai inga lengésidejét számítjuk ki. A rövidség kedvéért nevezzük lécháromszögnek az ingaként felfüggesztett alakzatot, és vizsgáljuk az alábbi feladatot:

Egyenletes keresztmetszetű és anyagsűrűségű $a \leq b \leq c$ hosszúságú vékony lécekből merev háromszöget készítünk, és azt az egyik, mondjuk a legrövidebb oldallal szemközti csúcsában a háromszög síkjára merőleges tengelyre ingaként felfüggesztjük (1. ábra). Határozzuk meg ennek a fizikai ingának kis kitérések esetén érvényes lengéside-képletét!



1. ábra

A fizikai ingák lengésidejének képletében a

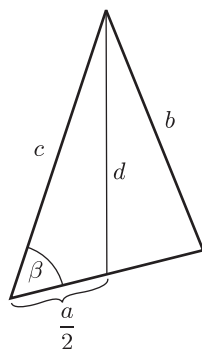
$$\frac{\Theta}{Mgs}$$

kifejezés szerepel; ebben Θ az ingatestnek a forgástengelyre vonatkozó (teljes, a három léce összesített) tehetetlenségi nyomatéka, M az össztömeg, s pedig az inga S tömegközéppontjának (súlypontjának) a tengelytől mért távolsága.

Számítsuk ki először Θ -t! Esetünkben a két hosszabb oldal egy-egy vége illeszkedik a tengelyre, tehát együttes tehetetlenségi nyomatékuk (ha a léce hosszegysége eső tömegét ϱ -val jelöljük):

$$\Theta_b + \Theta_c = \frac{1}{3}m_b \cdot b^2 + \frac{1}{3}m_c \cdot c^2 = \frac{1}{3}\varrho(b^3 + c^3).$$

A harmadik (legrövidebb) oldal tehetetlenségi nyomatékát a Steiner-tétel segítségével határozzuk meg. Ebben szükség van az oldal felezőpontja és a tengely d távolságára (2. ábra).



2. ábra

Írjuk fel a koszinusztételt először a teljes háromszögre, majd annak bal oldali felére úgy, hogy a b , illetve a d szakaszokat fejezzük ki. Mindkét összefüggésben szerepel $\cos \beta$, ezt kiküszöbölve kapjuk a keresett d szakasz négyzetére:

$$d^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

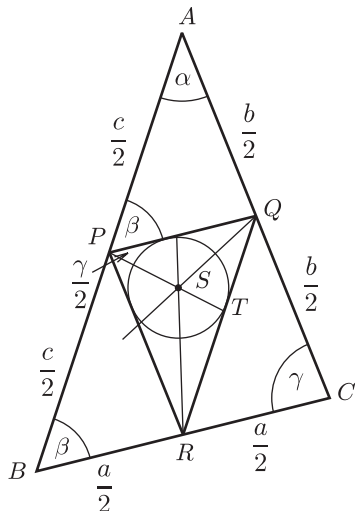
Ennek felhasználásával már felírhatjuk az egész lécháromszög tehetetlenségi nyomatékának képletét:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{3}\varrho(b^3 + c^3) + \frac{1}{12}\varrho a \cdot a^2 + \varrho a \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \\ &= \frac{2b^3 + 2c^3 - a^3 + 3ab^2 + 3ac^2}{6}\varrho. \end{aligned}$$

Az inga össztömege az oldalak tömegének összegeként számítható:

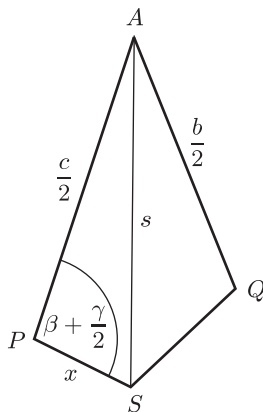
$$M = (a + b + c)\rho.$$

Belátható (lásd pl. az idézett cikket a KöMaL 2002. évi 5. számában), hogy egy lécháromszög S súlypontja a háromszög P , Q és R oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög belső szögfelezőinek metszéspontjában, vagyis az ide beírható kör középpontjában van (3. ábra). (Az eredeti háromszög szögei a szokásos jelekkel: α , β és γ .)



3. ábra

Az s szakasz meghatározásához tekintsük azt a négyszöget, amelynek csúcsai a következők: az S súlypont, a b oldal Q felezőpontja, a lengési tengelyt képező A háromszög-csúcspont, és végül a c oldal P felezőpontja (4. ábra).

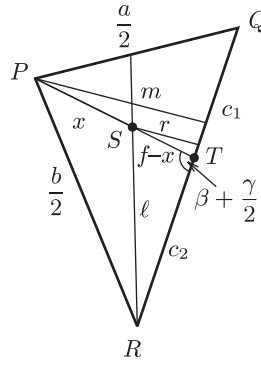


4. ábra

A vizsgált négyszögben az AS átlóra vonatkozó koszinusztétel:

$$s^2 = \frac{c^2}{4} + x^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot x \cdot \cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right).$$

Ebben x az eredeti háromszög oldalfelező pontjai által képzett kis háromszög egyik belső szögfelezőjének része (azon darabja, amely a c oldal P felezőpontjától a kis háromszögbe beírható kör középpontjáig, vagyis esetünkben a léckeret S fizikai súlypontjáig tart). Nagyságát meg tudjuk határozni abból, hogy a háromszög szögfelezőjének hossza ismert módon (lásd pl. Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor: *Érdekes matematikai feladatok VI.*, Középiskolai szakköri füzetek, 1975. 108. feladat) kiszámítható az oldalak hosszából. A számolás során felhasználjuk a szögfelező-tételt, amelyben a c oldalnak a szögfelező által szétválasztott két része, c_1 és c_2 szerepel (5. ábra).



5. ábra

Jelen esetben a kis háromszög $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ hosszúságú oldalai által közrefogott szögfelezőről van szó, amelynek hossza tehát (az idézett tétel szerint):

$$f = \frac{\sqrt{ab(a+b)^2 - abc^2}}{2(a+b)}.$$

Az 5. ábrán szerepel még az oldalfelező pontok által meghatározott kis háromszögbe írható kör r sugara, illetve a $\frac{c}{2}$ hosszúságú oldalhoz tartozó m magasság. A magasság és a szögfelező, valamint r és a szögfelező mellette levő része két derékszögű háromszöget alkot; ezek hasonlósága miatt fennáll, hogy

$$\frac{f-x}{f} = \frac{r}{m}.$$

Ha az eredeti (a , b és c oldalú) nagy háromszög területe t , akkor a kis háromszögé $\frac{t}{4}$. Héron képletét használva kapjuk, hogy

$$\frac{r}{m} = \frac{c}{a+b+c},$$

s evel:

$$x = f \cdot \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{\sqrt{ab(a+b)^2 - abc^2}}{2(a+b+c)}.$$

A 4. ábrán látható négyszög átlója s hosszának kiszámításához szükségünk van a $\beta + \frac{\gamma}{2}$ szög koszinuszának értékére is. Az 5. ábrán az $STR \triangleleft$ a 4. ábrán látható $APS \triangleleft$ váltószöge, tehát egyenlők. Az TRP háromszög RS szögfelezőjének ℓ hossza ugyanúgy határozható meg, ahogyan korábban x -et kaptuk. A kiszámított ℓ értéket az STR háromszögre felírt

$$\ell^2 = (f-x)^2 + c_2^2 - 2(f-x)c_2 \cdot \cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

koszinusztételbe helyettesítve, majd abból a kívánt koszinusz értéket kifejezve:

$$\begin{aligned} \cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) &= \\ &= \frac{c^2[ab(a+b)^2 - abc^2] + b^2c^2(a+b+c)^2 - (a+b)^2[bc(b+c)^2 - a^2bc]}{2(a+b+c)bc^2\sqrt{ab(a+b)^2 - abc^2}}. \end{aligned}$$

Ezzel (a már felírt koszinusztételből) a súlypont és a tengely keresett távolságára:

$$s = \frac{\sqrt{c(a+b+c)^2(c-b) + a(b-c)[(a+b)^2 - c^2] + [(b+c)^2 - a^2](a+b)^2}}{2(a+b+c)},$$

a lengésidő képlete pedig (algebrai átalakítások után):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2 - bc) + a(b+c) - a^2}{3g}} \sqrt{\frac{a+b+c}{b^3 + c^3 - a^3 + a(2b^2 + 2c^2 - bc)}}.$$

A kapott – meglehetősen terjedelmes – lengésidő-képletet (amely akkor is érvényes, ha nem a a legrövidebb oldal) érdemes néhány speciális esetben a fentiekől független, önálló számítással is ellenőrizni. Ilyen speciális eset, amikor

$b = c$, vagyis egyenlőszárú háromszög képezi az ingát ($0 < a < 2b$). Egy ilyen inga súlypontjának helye közvetlen számítással úgy kapható, hogy a két szár együttes $2b\rho$ tömegét az a alaphoz tartozó m hosszúságú magasságvonalra, annak felezőpontjába helyezzük, az alapvonal teljes $a\rho$ tömegét pedig a magasságvonal alsó végpontjába koncentrálna képzeljük el. A lécháromszög súlypontja a magasság felezőpontja alatt bizonyos x távolságban lesz, s ezt a távolságot a szokásos nyomatéki egyenletből számíthatjuk ki:

$$2b\rho \cdot x = a\rho \left(\frac{m}{2} - x \right).$$

Ebből

$$x = \frac{ma}{2(2b + a)},$$

vagyis a súlypont és a forgástengely távolsága

$$s = \frac{m}{2} + x = \frac{m}{2} + \frac{ma}{2(2b + a)} = m \cdot \frac{a + b}{2b + a}.$$

Az inga teljes tömege: $M = (a + 2b)\rho$. A rendszer tehetetlenségi nyomatéka a három lécsúlypontjának tehetetlenségi nyomatékának összegeként számolható. A háromszög alapját képező lécdarabnak a rajta kívül fekvő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a Steiner-tétel alapján

$$\Theta_a = \frac{1}{12}a\rho \cdot a^2 + a\rho \cdot m^2,$$

ahol (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) a magasság négyzete

$$m^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}.$$

A háromszög szárait alkotó lécsúlypontjának tehetetlenségi nyomatéka a végpontjukon átmenő tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta_b = \Theta_c = \frac{1}{3}b\rho \cdot b^2,$$

a teljes lécháromszög tehetetlenségi nyomatéka pedig

$$\Theta = \Theta_a + \Theta_b + \Theta_c = 2 \cdot \frac{1}{3}b\rho \cdot b^2 + \frac{1}{12}a\rho \cdot a^2 + a\rho \cdot m^2 = \frac{4b^3 + 6ab^2 - a^3}{6}\rho.$$

Mindezek felhasználásával a lengésidejő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4b^3 + 6ab^2 - a^3}{3g(a + b)\sqrt{4b^2 - a^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(2b^2 + 2ba - a^2)\sqrt{2b + a}}{3g(a + b)\sqrt{2b - a}}}.$$

Az általános képletben $b = c$ helyettesítést alkalmazva megkapjuk ugyanezt az eredményt, ezzel ellenőriztük egy speciális esetben az általános formula helyességét.

Ha – mesterkélt módon – még az $a = 0$ „oldalhosszal” is számolunk, akkor két, szorosan egymás mellett elhelyezkedő lécdarab, vagyis egy M tömegű rúd inga esetét kapjuk, amelynek lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{Mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}Mb^2}{Mg\frac{b}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2b}{3g}},$$

amit természetesen – határesetben – az általános képlet is visszaad.

Hasonlóan számíthatjuk ki egy szabályos lécháromszög lengésidejét is. Az általános képletből $a = b = c$ helyettesítéssel, vagy a fizikai inga lengésidejő-képletéből (a tömegközéppont helyzetének ismeretében, és a Steiner-tételt alkalmazva) adódik:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}}.$$