

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \quad \sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4} = \log_2 \frac{4}{x} \quad (6 \text{ pont})$$

$$b) \quad \sqrt{5 - \cos^2 x - 4 \sin x} = 2 - \sin x \quad (6 \text{ pont})$$

Megoldás. a) Az egyenletben szereplő logaritmusok miatt $x > 0$ kell, hogy legyen. Az egyenlet jobb oldala így alakítható:

$$\log_2 \frac{4}{x} = \log_2 4 - \log_2 x = 2 - \log_2 x.$$

Érdemes bevezetni a $\log_2 x = a$ új ismeretlent: $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$. Mivel a négyzetgyök alatt teljes négyzet van, azért egyenletünk: $|a - 2| = 2 - a$. Innen $a \leq 2$. Tehát $\log_2 x \leq 2 = \log_2 4$, ahonnan $x \leq 4$, a $\log_2 x$ monoton növekedése miatt.

Az eredeti egyenletet kielégítő valós számok: $0 < x \leq 4$.

b) Próbáljuk elérni a négyzetgyök alatt, hogy csak egyfajta szögfüggvény szerepeljen.

$$\sqrt{5 - (1 - \sin^2 x) - 4 \sin x} = 2 - \sin x,$$

$$\sqrt{\sin^2 x - 4 \sin x + 4} = 2 - \sin x,$$

$|\sin x - 2| = 2 - \sin x$, ahonnan $\sin x - 2 \leq 0$, azaz $\sin x \leq 2$.

Tehát az eredeti egyenlet minden valós számra teljesül.

2. Egy kocsmáros kiszámította, hogy ha a 60%-os alkoholjához hozzáönt 12 liter vizet, akkor 42%-os alkoholként árulhatja azt.

a) Hány liter volt az eredeti 60%-os alkohol? (6 pont)

b) A nagyobb nyereség reményében a kocsmáros nem 12, hanem 16 liter vizet öntött az eredeti alkoholhoz. A kocsmáros azt tapasztalta, hogy a 42%-os alkohol esetében a $\pm 2\%$ -os eltérést műszer nélkül még nem fedezik fel a fogyasztók, de az annál nagyobb eltérést már igen. Észreveszik-e a vendégek a csalást? (6 pont)

Megoldás. a) Legyen az eredeti 60%-os alkohol x liter, tehát a keverékben levő tömény alkohol $0,6x$ liter. 12 liter vizet hozzáöntve a keverék mennyisége $x + 12$ liter, de a benne levő tömény alkohol mennyisége nem változik. Ekkor 42%-os oldatot kapunk, így a következő egyenletet írjuk fel:

$$\frac{0,6x}{x + 12} \cdot 100 = 42, \quad \text{azaz} \quad 60x = 42x + 504, \quad \text{ahonnan} \quad x = 28.$$

Tehát az eredeti 60%-os alkohol 28 liter volt.

b) Ha 28 liter 60%-os alkoholhoz 16 liter vizet öntünk, akkor annak a töménysége

$$\frac{28 \cdot 0,6}{28 + 16} \cdot 100 \approx 38,18\%$$

lesz. Ez több, mint 2%-kal tér el a tervezett 42%-os alkoholtól, ami azt jelenti, hogy a fogyasztók észreveszik a „csalást”.

3. Egy felmérés során megkérdeztek 52 családot a családban élő gyerekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét a táblázat mutatja.

		Fiúk száma					
		0	1	2	3	4	5
Lányok száma	0	6	1	2	2	1	0
	1	2	3	2	1	2	1
	2	4	3	2	1	3	1
	3	3	2	2	1	1	0
	4	1	1	1	1	0	0
	5	0	1	0	1	0	0

(Tehát pl. olyan család, melyben egyetlen gyermek sincs 6 db volt, míg olyan, amelyben egy fiú és két lány, 3 volt.)

a) Átlagosan hány gyermek van egy családban? (5 pont)

b) Összesen hány fiú és hány lány van a megkérdezett családokban? (4 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztva 2 családot a megkérdezettek közül, mekkora annak a valószínűsége, hogy e két család mindegyikében legalább 3 gyermek van? (4 pont)

Megoldás. a) Foglaljuk táblázatba, hogy hány olyan család van, melyben 1, 2, ... stb. gyermek van. A megadott táblázatból kiolvassza:

gyerekszám	0	1	2	3	4	5	6	7	8
családok száma	6	3	9	10	7	6	7	3	1

A családokban a gyermekek számának átlaga:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{52} = \frac{180}{52} \approx 3,46.$$

b) Azoknak a családoknak a száma,

melyben 1 fiú van: $1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$, ez 11 fiú;

ahol 2 fiú van: $2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$, ez 18 fiú;

ahol 3 fiú van: $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$, ez 21 fiú;

ahol 4 fiú van: $1 + 2 + 3 + 1 = 7$, ez 28 fiú;

ahol 5 fiú van: $1 + 1 = 2$, ez 10 fiú.

Tehát a vizsgált családokban összesen $11 + 18 + 21 + 28 + 10 = 88$ fiú van.

Hasonlóképpen kapjuk a lányok számát: 92.

Megjegyzés. Az a) részben összeszámoltuk, hogy összesen 180 gyerek van a vizsgált családokban, így is megkaphatjuk a lányok számát: $180 - 88 = 92$.

c) Az 52 család közül kettőt $\binom{52}{2}$ -féleképpen választhatunk ki. A feladat táblázatából kiolvashatjuk, hogy 34 azoknak a családoknak a száma, melyekben legalább 3 gyerek van. Ezek közül kettőt $\binom{34}{2}$ -féleképpen választhatunk ki. Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{34}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{34!}{2! \cdot 32!} \cdot \frac{2! \cdot 50!}{52!} = \frac{33 \cdot 34}{51 \cdot 52} = \frac{1122}{2652} \approx 0,423.$$

4. A háromkötetes irodalmi lexikont kötetenként is meg lehet vásárolni. Egy alkalommal azt vizsgálták egy könyvesboltban egy héten át, hogy az egyes kötetekből az egyes napokon hány darab fogyott. A vizsgálat eredményét szemlélteti a táblázat.

	hétfő	kedd	szerda	csüt.	pént.	szomb.
I. kötet	2	1	4	2	4	2
II. kötet	3	2	2	1	0	2
III. kötet	5	3	4	6	3	3

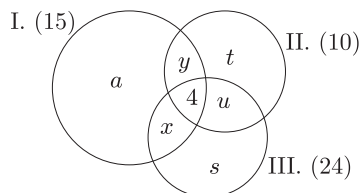
Négy olyan vásárló volt, aki mindhárom kötetet megvette (egy kötetből senki sem vásárolt több példányt.) Azok közül, akik megvásárolták az első kötetet, 6-an voltak olyanok, akik nem vették meg a másodikat, és szintén 6-an voltak, akik nem vették meg a harmadik kötetet.

a) Ha olyan vásárló nem volt, aki csak a második kötetet vette meg, akkor hányan vannak azok, akik csak a harmadik kötetet vették meg? (6 pont)

b) Hány olyan vásárló volt a héten, aki vásárolt az irodalmi lexikonokból? (3 pont)

c) Mindhárom kötet ára egységesen 3600 Ft. Aki két kötetet vásárolt, az az egyik megvásárolt kötetre kapott 10% kedvezményt. Aki mindhárom kötetet megvette, az az egyik megvásárolt kötetre 10%, egy másik megvásárolt kötetre pedig 20% kedvezményt kapott. Mennyi volt a bolt bevétele e kötetek után ezen a héten? (5 pont)

Megoldás. a) Az I. kötetet 15-en, a II. kötetet 10-en, a III. kötetet 24-en vásárolták meg. Ábrázoljuk halmazábrán (1. ábra), amit tudunk.

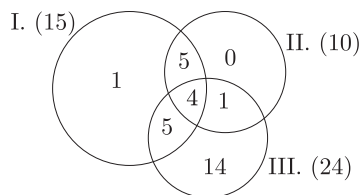


1. ábra

A feltételek szerint $a + x = 6$ és $a + y = 6$, tehát $x = y$, továbbá $t = 0$.

Ezek szerint $2x + a + 4 = 15$, azaz $2x + a = 11$. Mivel $a = 6 - x$, így ezt az előbbi egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $2x + 6 - x = 11$, ahonnan $x = y = 5$, és ezzel $a = 1$.

Egészítsük ki halmazábránkat (2. ábra). Az ábrából kiolvasható, hogy 14-en vásárolták meg csak a III. kötetet.



2. ábra

b) A héten a boltban e kötetekből összesen $1 + 5 + 4 + 5 + 1 + 14 = 30$ -an vásároltak.

c) A 30 vásárló mindegyike kifizette egy kötet teljes árát. Közülük 15-en az általuk vásárolt második kötet árát, azaz a teljes ár 10%-kal csökkentett árát is kifizették. Az összes vásárló között volt még négy olyan is, aki három kötetet vásárolt, így ők még kifizették négy kötet teljes árának 20%-kal csökkentett árát is. Ezek szerint az üzlet bevétele: $30 \cdot 3600 + 15 \cdot 3600 \cdot 0,9 + 4 \cdot 3600 \cdot 0,8 = 108\,000 + 48\,600 + 11\,520 = 168\,120$ Ft.

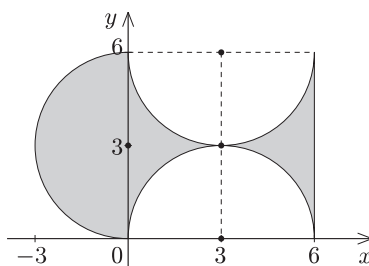
II. rész

5. Egy forgástest alakú díszítőelem tengelymetszetét látjuk az ábrán egy koordinátarendszerben elhelyezve. A síkmetszetet határoló görbék:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 3)^2 &= 9 \quad (x \leq 0), \\ (x - 3)^2 + y^2 &= 9 \quad (y \geq 0), \\ (x - 3)^2 + (y - 6)^2 &= 9 \quad (y \leq 6) \end{aligned}$$

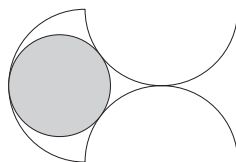
a) Mekkora a síkmetszet területe?

(6 pont)



b) A forgástestbe – hogy stabilabb legyen – egy olyan gömböt helyeztek, mely nem tud elmozdulni. (Ez a síkmetszeten egy olyan főkör, mely két félkört kívülről, egyet pedig belülről érint.) Mekkora e gömb sugara?

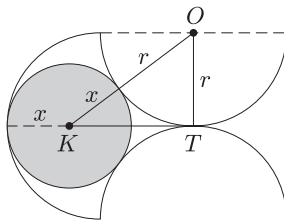
(10 pont)



Megoldás. a) A síkmetszet egy r sugarú félkörből, valamint egy $2r$ oldalú négyzetből kivett r sugarú körből áll, ahol $r = 3$. Tehát a síkmetszet területe:

$$\frac{r^2\pi}{2} + 4r^2 - r^2\pi = 4r^2 - \frac{r^2\pi}{2} = 4 \cdot 3^2 - \frac{3^2\pi}{2} \approx 21,86.$$

b) Tekintsük a *KTO* derékszögű háromszöget.



Az $OT = r$, $OK = r + x$ és $TK = 2r - x$ felhasználásával felírjuk a Pitagorasz-tételt: $(r + x)^2 = r^2 + (2r - x)^2$, amiből

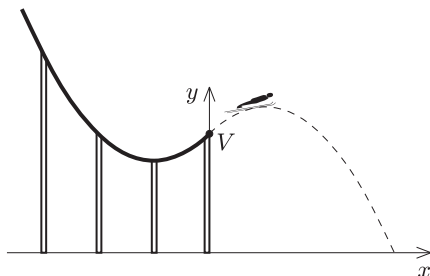
$$r^2 + x^2 + 2rx = r^2 + 4r^2 + x^2 - 4rx,$$

azaz $6rx = 4r^2$. Vagyis $x = \frac{2}{3}r = 2$.

6. Az ábrán egy sánc lesikló pályáját látjuk egy koordinátarendszerhez rögzítve. A sánc az

$$f(x) = \frac{4}{250}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{322}{5}$$

függvény grafikonjához illeszkedik, ahol az x tengely az 1000 m-es tengerszint feletti magasságon; a sánc V végpontja az y tengelyen van. Az egyik síelő a V pontot elhagyva egy olyan parabola-pályán repül tovább, mely a sáncnak megfelelő parabola V -re vonatkozó tükörképe.



- a) A tengerszinthez képest milyen magasságig repül fölfele a síelő? (4 pont)
 b) A sánc V végpontját tartalmazó tartóoszloptól milyen távol éri el az 1000 m-es tengerszint feletti magasságot a síelő? (6 pont)
 c) Írja fel a síelő röppályája érintőjének egyenletét a sánc elhagyásának pillanatában. (6 pont)

Megoldás. a) A másodfokú kifejezést a következő módon alakítjuk:

$$\begin{aligned} \frac{4}{250}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{322}{5} &= \frac{4}{250} \cdot [x^2 + 60x + 4025] = \frac{4}{250} \cdot [(x + 30)^2 + 3125] = \\ &= \frac{4}{250} \cdot (x + 30)^2 + 50 \end{aligned}$$

A sánc pályája tehát $x = -30$ -ban van minimuma, minimumértéke 50. A sánc pályája az y tengelyt $\frac{322}{5} = 64,4$ -nél metszi. Ezek szerint a V pontra vonatkozó tükörképének maximuma a $(-30; 50)$ pontnak a $(0; 64,4)$ pontra vonatkozó tükörképe, vagyis a $(30; 78,8)$ pont. Ezek szerint a síelő a sánc pályáját elhagyva az alábbi görbe mentén repül:

$$y = -\frac{4}{250} \cdot (x - 30)^2 + 78,8.$$

Ez azt jelenti, hogy a tengerszinthez képest a síelő 1078,8 m magasságig repül.

b) Azt kell kiszámítanunk, hogy a síelő röppályájának hol van $x > 0$ esetén zérushelye.

$$-\frac{4}{250} \cdot (x - 30)^2 + 78,8 = 0, \quad \text{azaz} \quad (x - 30)^2 = \frac{250 \cdot 78,8}{4} = 4925.$$

Innen $x \approx 100,2$. Tehát a síelő a szélső tartóoszloptól kb. 100,2 m távolságra éri el az 1000 méteres tengerszint feletti magasságot.

c) A keresett érintő áthalad a $P(0; 64,4)$ ponton. Meredeksége a síelő pályaequationét leíró függvénynek az $x = 0$ helyen vett deriváltja.

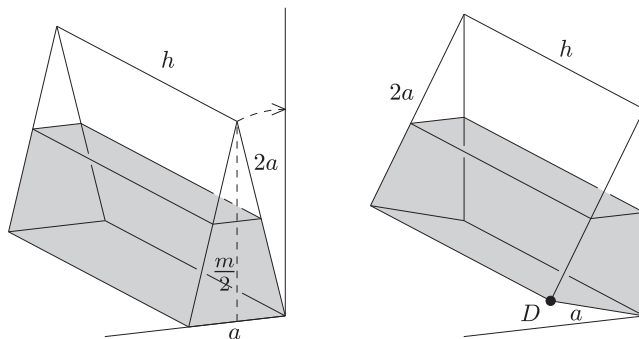
$$f'(x) = \left[-\frac{4}{250} \cdot (x - 30)^2 + 78,8 \right]' = -\frac{8}{250}x + \frac{24}{25}, \quad \text{azaz} \quad f'(0) = \frac{24}{25}.$$

Ezek szerint a keresett érintő egyenlete:

$$y - 64,4 = \frac{24}{25}x, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{24}{25}x + 64,4.$$

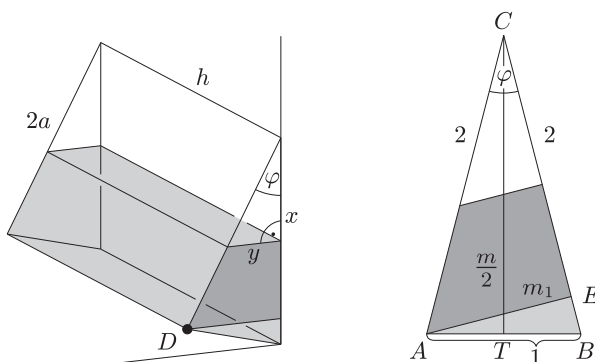
7. Egy egyenes hasáb alapja olyan egyenlő szárú háromszög, melynek szára az alap kétszerese. A hasáb a háromszög alapjára illeszkedő oldallapján fekszik a földön a fal mellett, és ilyen helyzetben magasságának feléig megtöltöttük vízzel (lásd bal oldali ábra), a test falának vastagsága elhanyagolható.

a) Milyen magasan áll a víz a testben, ha azt elforgatva a falnak támasztjuk (lásd jobb oldali ábra)? (8 pont)



b) A test D csúcsában van egy dugó. Miután a hasábot a leírt módon a falnak támasztottuk, kihúztuk a dugót, ahonnan a víz 12 liter/perc átlagos sebességgel folyik ki a testből. Mennyi ideig folyik a víz, ha $a = 1$ m, $h = 4$ m? (8 pont)

Megoldás. a) Tekintsük az ábrát. Ha a hasáb eredeti helyzetében magasságának feléig van megtöltve, akkor a síkmetszet „üres” tartománya olyan egyenlő szárú háromszög, mely hasonló az eredeti háromszöghöz és a hasonlóság aránya 1 : 2. Tehát az „üres” háromszög területe az eredeti háromszög területének negyed része.



Az eredeti háromszög magassága:

$$m = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Az eredeti háromszög T területe: $T = \frac{\sqrt{15}}{4}$, így az „üres” háromszög T_1 területe: $T_1 = \frac{\sqrt{15}}{16}$.

Ezek szerint a bal oldali ábrán látható „üres”, derékszögű háromszögre az alábbi összefüggéseket írhatjuk fel:

$$(1) \quad \frac{xy}{2} = \frac{\sqrt{15}}{16}, \quad \text{és} \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

A $\cos \varphi$ értékét az eredeti háromszögből kaphatjuk meg a koszinusztétel segítségével: $1 = 4 + 4 - 8 \cos \varphi$, ahonnan $\cos \varphi = \frac{7}{8}$. Ezt felhasználva az (1) egyenletrendszer így alakul:

$$y = \frac{\sqrt{15}}{8x} \quad \text{és} \quad \frac{49}{64} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{49}{64} = \frac{x^2}{x^2 + \frac{15}{64x^2}}.$$

Bővítsük az utóbbi tört jobb oldalát x^2 -tel:

$$\frac{49}{64} = \frac{x^4}{x^4 + \frac{15}{64}}, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{49}{64}x^4 + \frac{49}{64} \cdot \frac{15}{64} = x^4, \quad \text{vagyis} \quad x^4 = \frac{49}{64},$$

tehát $x = \sqrt{\frac{7}{8}}$, amiből $2 - x = 2 - \sqrt{\frac{7}{8}} \approx 1,065$.

Ezek szerint a hasáb megdöntése után a víz magassága kb. 1,065 m.

b) Egy olyan egyenes hasáb térfogatát kell kiszámolni, melynek alapja egy derékszögű trapéz (ezt a két ábrán sötétebbre színeztük).

A jobb oldali ábra ABE és CBT háromszögei hasonlóak, és a hasonlóság aránya $1 : 2$, így az ABE háromszög területe a CBT háromszög területének negyed része, vagyis az eredeti háromszög területének $\frac{1}{8}$ -a. Mivel az „üres” rész területe – mint láttuk – az eredeti háromszög területének a negyede, így a hasáb alapját alkotó trapéz területe az eredeti háromszög területének $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ -ad része, azaz

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5\sqrt{15}}{32}.$$

A hasáb V térfogata:

$$V = \frac{5\sqrt{15}}{32} \cdot 4 \approx 2,4206 \text{ m}^3 = 2420,6 \text{ liter}.$$

A folyás sebessége 12 liter/perc, így a dugó kihúzása után a víz $\frac{2420,6}{12} \approx 201,7$ percig folyik a tartályból.

8. a) Egy számtani sorozat első tagja \overline{ab} , második tagja \overline{ba} (kétjegyű számok), harmadik tagja az \overline{acb} háromjegyű szám. Mekkora e sorozat differenciája? (9 pont)

b) Legyenek a_n és b_n pozitív egészekből álló, nem állandó számtani sorozatok. Igazoljuk, hogy $a_{b_n} - b_{a_n}$ n -től független állandó. (7 pont)

Megoldás. a) Ha \overline{ab} , \overline{ba} , \overline{acb} egy számtani sorozat egymást követő három tagja, akkor

$$\frac{\overline{ab} + \overline{acb}}{2} = \overline{ba}.$$

Csak $a = 1$ lehet, ugyanis $a \geq 2$ esetén a bal oldali számláló 200-nál nagyobb lenne, így a jobb oldal nem lehetne kétjegyű szám. Tehát $a = 1$, így $\overline{1b} + \overline{1cb} = 2 \cdot \overline{b1}$, azaz $10 + b + 100 + 10c + b = 20b + 2$, ahonnan $108 = 18b - 10c$.

Ez utóbbi egyenlőség bal oldala osztható 9-cel. Mivel a jobb oldal első tagja is osztható 9-cel, így a második tagnak is 9-cel oszthatónak kell lennie, ami csak úgy lehet, ha $c = 0$, ekkor $b = 6$; vagy ha $c = 9$, de ekkor $b = 11$, ami nem megoldás.

Tehát a sorozat első három tagja: 16, 61, 106, így a sorozat d differenciája: $d = 61 - 16 = 45$.

b) Legyen az a_n sorozat első tagja a , differenciája d_1 , a b_n sorozat első tagja b , differenciája d_2 . Ekkor

$$a_{b_n} = a + (b_n - 1)d_1 = a + [b + (n - 1)d_2 - 1]d_1 = a + bd_1 + nd_2d_1 - d_2d_1 - d_1,$$

$$b_{a_n} = b + (a_n - 1)d_2 = b + [a + (n - 1)d_1 - 1]d_2 = b + ad_2 + nd_1d_2 - d_1d_2 - d_2.$$

Tehát $a_{b_n} - b_{a_n} = a - b + bd_1 - ad_2 - d_1 + d_2$, és ez valóban n -től független állandó.

9. a) Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:

$$\sqrt{x^2 - 15x + 36} + \sqrt{-x^2 + 19x - 84} + \log_{\frac{x}{2}} 36. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Mely x , y , z valós számok elégítik ki az alábbi egyenletet?

$$\sqrt{x^2 - 15x + 36} + \sqrt{-x^2 + 19x - 84} + \log_{\frac{x}{2}} 36 = 2 \cos 3z - y^2 + 4y - 4. \quad (10 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A megadott kifejezésben x -re nézve az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

$$x^2 - 15x + 36 \geq 0, \quad -x^2 + 19x - 84 \geq 0, \quad x > 0, \quad x \neq 2.$$

Az első egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés zérushelyei: 3 és 12, így az egyenlőtlenség megoldása: $x \leq 3$ vagy $12 \leq x$.

A második egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés zérushelyei: 7 és 12, így ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása: $7 \leq x \leq 12$.

A két egyenlőtlenség megoldását a másik két feltétellel egybevetve az eredeti egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x = 12$.

b) Helyettesítsük az egyenletbe a kapott $x = 12$ értéket:

$$\log_6 36 = 2 \cos 3z - (y^2 - 4y + 4), \quad \text{azaz} \quad 2 = 2 \cos 3z - (y - 2)^2.$$

A kapott egyenlet jobb oldalán $\cos 3z$ értéke legfeljebb 1, így az egyenlet jobb oldalának értéke legfeljebb 2. Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\cos 3z = 1$ és $(y - 2)^2 = 0$, azaz $y = 2$. A $\cos 3z = 1$ egyenletből pedig $3z = 2k\pi$, azaz $z = \frac{2}{3} \cdot k\pi$.

Tehát az eredeti egyenletet kielégítő x , y , z valós számok: $x = 12$, $y = 2$, $z = \frac{2}{3} \cdot k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).