

A1. Keressük meg α minden olyan értékét, amelyre az

$$y = \alpha x^2 + \alpha x + \frac{1}{24} \quad \text{és az} \quad x = \alpha y^2 + \alpha y + \frac{1}{24}$$

görbék érintik egymást.

A2. Legalább mekkora a területe egy síkbeli konvex halmaznak, amely metszi az $xy = 1$ hiperbola mindkét szárát és az $xy = -1$ hiperbola mindkét szárát? (Akkor mondjuk a síkbeli S halmazról, hogy *konvex*, ha S tartalmazza bármely két pontjának összekötő szakaszát.)

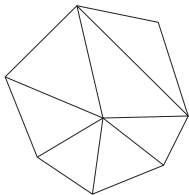
A3. Legyen k pozitív egész szám. Véletlenszerű sorrendben egymás után leírjuk az $1, 2, 3, \dots, 3k+1$ egészeket. Mi a valószínűsége annak, hogy a leírás során nincs olyan időpillanat, amikor az addig már leírt számok összege osztható 3-mal? A válasz zárt alak legyen, de tartalmazhat faktoriálisokat.

A4. A *csupaegy* kifejezés jelentsen olyan tízes számrendszerben írt pozitív egészeket, amelyeknek minden jegye 1-es. Keressük meg az összes olyan valós együtthatós f polinomot, amelyre hogyha n csupaegy, akkor $f(n)$ is az.

A5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges csoportnak pontosan n darab p rendű eleme van, ahol p prímszám, akkor vagy $n = 0$, vagy p osztója $(n+1)$ -nek.

A6. Egy P sokszög $\mathcal{T}$ *háromszögelésének* nevezzük véges sok háromszögnek olyan együttesét, amelyek uniója P , és amelyben bármely két háromszög közös része vagy üres, vagy egy közös csúcs, vagy egy közös oldal; továbbá a sokszög minden oldala pontosan egy $\mathcal{T}$ -beli háromszög oldala legyen.

Tekintsünk egy $\mathcal{T}$ háromszögelést *megfelelőnek*, ha minden belső csúcsban legalább 6 háromszög találkozik. Példa:



Bizonyítsuk be, hogy létezik csak n -től függő M_n egész szám, amelyre egy n oldalú P sokszög minden megfelelő háromszögelése legfeljebb M_n háromszögből áll.

B1. Legyen f pozitív egész együtthatós polinom, n pedig pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ pontosan akkor osztója $f(f(n)+1)$ -nek, ha $n = 1$. [A szerkesztő megjegyzése: fel kell tennünk, hogy f nem konstans.]

B2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan deriválható és

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

akkor minden $\alpha \in (0; 1)$ esetén

$$\left| \int_0^\alpha f(x) dx \right| \leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

B3. Legyen $x_0 = 1$ és minden $n \geq 0$ esetén legyen

$$x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n \sqrt{5} \rfloor.$$

Így tehát $x_1 = 5$, $x_2 = 26$, $x_3 = 136$, $x_4 = 712$. Fejezzük ki x_{2007} -et zárt alakban. ($\lfloor a \rfloor$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amelyik nem nagyobb a -nál.)

B4. Legyen n pozitív egész. Hány olyan P , Q valós együtthatós polinompár van, amelyekre

$$(P(X))^2 + (Q(X))^2 = X^{2n} + 1$$

és $\deg P > \deg Q$.

¹A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: <http://math.scu.edu/putnam/index.html>, a megoldások a <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml> honlapon található.

B5. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egészre léteznek olyan

$$P_0(n), P_1(n), \dots, P_{k-1}(n)$$

(esetleg k -től függő) polinomok, amelyekre minden n egész esetén

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^k = P_0(n) + P_1(n) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \dots + P_{k-1}(n) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-1}.$$

($\lfloor a \rfloor$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amelyik nem nagyobb a -nál.)

B6. Minden n pozitív egészre legyen $f(n)$ az a szám, ahányféleképpen $n!$ centnek megfelelő értéket összeállíthatunk olyan érmékből, amelyek mindegyike $k!$ centet ér (a sorrend nem számít), ahol $1 \leq k \leq n$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n -től független C konstans, amelyre

$$n^{n^2/2 - Cn} e^{-n^2/4} \leq f(n) \leq n^{n^2/2 + Cn} e^{-n^2/4}.$$