I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\frac{2x^2-10x+9}{x^2-4x-12}=\frac{x^2-x-9}{(x-6)(x+2)}. \qquad \textit{(11 pont)}$$

Megoldás. A két nevező egyenlő. A feladat értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;6\}$. A számlálóknak is egyenlőnek kell lenni: $2x^2-10x+9=x^2-x-9$. A következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2-9x+18=0.$$

A gyökök: $x_1=3$, $x_2=6$. A feladat megoldása az $x_1=3$, mert csak ez van benne az értelmezési tartományban.

2. *Az ABC háromszög oldalainak hossza* 26*,* 28 *és* 30*.*

a) Igazoljuk, hogy a háromszög hegyesszögű!

b) Mekkora a háromszög leghosszabb magassága?

c) Az ABC háromszög síkjával párhuzamos síkban van egy $A'B'C'$ háromszög, amely az ABC háromszöghöz középpontosan hasonló, a hasonlóság aránya 0,5*. A két párhuzamos sík távolsága* 12*. Mennyi az $ABCA'B'C'$ test térfogata?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Számoljuk ki az ABC háromszög leghosszabb oldalával szemközti, legnagyobb γ szögét. Írjuk föl a koszinusz-tételt a γ szögre:

$$30^2=26^2+28^2-2\cdot 26\cdot 28\cdot\cos\gamma,$$

amiből $\cos\gamma\approx 0{,}3846$. Vagyis a háromszög legnagyobb szöge hegyes ($\gamma\approx 67{,}4^\circ$), így a háromszög hegyesszögű.

b) Számoljuk ki az ABC háromszög területét. A Heron-képlet szerint

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol s a háromszög kerületének felét, az a, b, c pedig a háromszög oldalainak a hosszát jelenti. Vagyis $T=\sqrt{42\cdot 12\cdot 14\cdot 16}=336$. A leghosszabb m_a magasság a legrövidebb oldalhoz tartozik. Ezzel felírva a területet:

$$336=\frac{26\cdot m_a}{2}, \quad \text{amiből} \quad m_a=\frac{336}{13}\approx 25{,}83.$$

c) Az ABC háromszög területe $T=336$. A hozzá hasonló háromszög területe: $t=\frac{1}{4}\cdot 336=84$, mivel a hasonlóság aránya 0,5, és a terület a hasonlóság arányának négyzetével arányos.

A kérdéses test egy csonkagúla, írjuk fel a térfogatát:

$$V=\frac{m}{3}\big(T+\sqrt{Tt}+t\big)=\frac{12}{3}\cdot\big(336+\sqrt{336\cdot 84}+84\big)=2352.$$

3. *a) Hány olyan négyjegyű szám van, amely osztható* 3*-mal és* 9*-re végződik?*

b) Ha egy számtani sorozat első 51 *darab páratlan sorszámú elemének összegéből kivonjuk az első* 50 *darab páros sorszámú elemének összegét, különbségként* 2007*-et kapunk. Ha ugyanennek a számtani sorozatnak az első* 50 *darab páros sorszámú elemének összegéből kivonjuk az első* 50 *darab páratlan sorszámú elemének összegét, akkor pedig* 2000 *a különbség. Határozzuk meg a sorozat* 101*. elemét.* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A 9-re végződő négyjegyű szám akkor osztható 3-mal, ha a 9 előtt levő háromjegyű szám osztható 3-mal. 900 háromjegyű szám van, és ezek közül minden harmadik, azaz 300 darab osztható 3-mal.

Vagyis 300 darab olyan négyjegyű szám van, amely osztható 3-mal és 9-re végződik.

b) Legyen a számtani sorozat első eleme a, a differenciája d.

Az első 51 darab páratlan sorszámú elemének összege: $51a+2550d$.

Az első 50 darab páros sorszámú elemének összege: $50a+2500d$.

Az első 50 darab páratlan sorszámú elemének összege: $50a+2450d$.

A szöveg szerint:

$$(51a+2550d)-(50a+2500d)=a+50d=2007,$$
$$\text{és} \qquad (50a+2500d)-(50a+2450d)=50d=2000.$$

Vagyis $d=40$, $a=7$. A sorozat 101. eleme az $a+100d=7+100\cdot 40=4007$.

4. *Mekkora szögben látszik a PQ szakasz az $y=x^2-2x-2$ egyenlettel megadott alakzat $P(-1;1)$ és $Q(2;-2)$ pontjában húzott érintők metszéspontjából? Adjuk meg az érintők metszéspontjának koordinátáit.* (*14 pont*)

Megoldás. Az érintő meredekségét az első derivált adja:

$$(x^2-2x-2)'=2x-2.$$

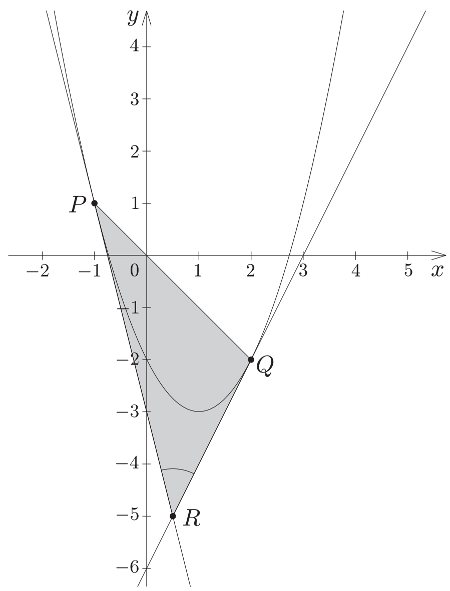
A P pontra illeszkedő érintő meredeksége -4, a Q pontra illeszkedő érintő meredeksége 2. A P-re illeszkedő érintő egyenlete:

$$e_P: \quad y-1=-4(x+1),$$

azaz $y=-4x-3$. A Q-ra illeszkedő érintő egyenlete:

$$e_Q: \quad y+2=2(x-2),$$

azaz $y=2x-6$. Vagyis a két érintő metszéspontja: $R\left(\frac{1}{2};-5\right)$.



A PQR háromszög oldalainak hosszát kiszámítjuk a csúcsok koordinátáiból: $RQ=\sqrt{11{,}25}$, $RP=\sqrt{38{,}25}$, $PQ=3\sqrt{2}$. Írjuk fel a koszinusz-tételt a kérdéses szögre:

$$18=11{,}25+38{,}25-2\cdot\sqrt{11{,}25}\cdot\sqrt{38{,}25}\cdot\cos\varphi,$$

ahonnan $\cos\varphi\approx 0{,}7593$, vagyis $\varphi\approx 40{,}6°$.

II. rész

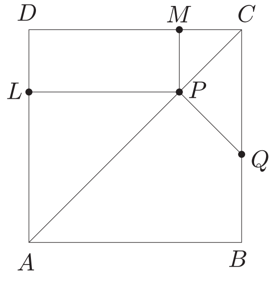
5. *Legyen P az $ABCD$ négyzet AC átlójának az a pontja, amelyre $AP=AB=1$. Az AC átlóra a P pontban állított merőleges egyenes a BC oldalt a Q pontban metszi. Az $ABCD$ sík P pontjában a síkra állított merőleges egyenesre mérjük fel a $PE=1$ távolságot.*

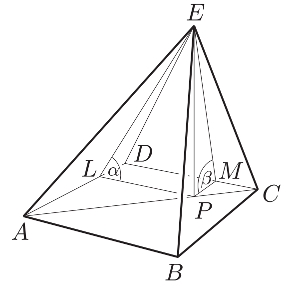
a) Igazoljuk, hogy az $ABQP$ négyszög deltoid.

b) A deltoid területe hányadrésze a négyzet területének?

c) Számítsuk ki az $ABCDE$ gúla oldallapjainak az alaplap síkjával bezárt hajlásszögét. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A feltétel szerint $AP=AB=1$ és $AC=\sqrt{2}$, azért $PC=\sqrt{2}-1$. A CPQ derékszögű háromszögben a C-nél 45° van, ezért $PQ=PC=\sqrt{2}-1$. A CPQ derékszögű háromszög átfogójának hossza: $CQ=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$. Ebből következik, hogy $BQ=CB-CQ=1-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$. Vagyis $AP=AB$, valamint $BQ=PQ$, így az $ABQP$ négyszög valóban deltoid.





b) Az $ABCD$ négyzet területe 1. Mivel az $ABQP$ négyszög derékszögű deltoid, azért területe: $t = AB \cdot BQ = 1 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0{,}41$. Ennyied része a deltoid területe a négyzet területének.

c) Két-két oldallap hajlásszöge megegyezik, így két szöget kell kiszámítanunk. A P pontból az AD élre állított merőleges talppontja legyen L, a DC élre állított merőlegesé pedig M. Az APL és a PCM egyenlő szárú derékszögű háromszögek felhasználásával: $LP = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $MP = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. A keresett α, illetve β szögek az LPE és az MPE derékszögű háromszögekből határozhatók meg:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha \approx 54{,}74^\circ,$$

$$\text{és} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}, \qquad \text{vagyis} \qquad \beta \approx 73{,}68^\circ.$$

6. *A $10^n + 14^n + 15^n + 21^n$ kifejezésben az n 3-mal osztható pozitív páratlan*[1] *egész számot jelöl.*

a) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen n esetén osztható lesz 1260-nal.

b) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Alakítsuk át a négytagú kifejezést:

$$10^n + 14^n + 15^n + 21^n = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot 7^n + 3^n \cdot 5^n + 3^n \cdot 7^n = (2^n + 3^n)(5^n + 7^n).$$

Legyen $n = 3k$, ahol k páratlan pozitív egész számot jelöl. Ekkor

$$(2^n + 3^n)(5^n + 7^n) = (2^{3k} + 3^{3k})(5^{3k} + 7^{3k}) = (8^k + 27^k)(125^k + 343^k).$$

Mivel a kitevők páratlan számok, azért $35 \mid 8^k + 27^k$ és $468 \mid 125^k + 343^k$. A 468 osztható 36-tal, és $(35; 36) = 1$, ezért a kifejezés osztható $35 \cdot 36 = 1260$-nal.

b) A négytagú összeg két tagját hatféleképpen választhatjuk ki. Mivel a kitevők páratlan számok, azért az összeg osztható lesz az alapok összegével. Az alapok összege a következő hat érték közül kerülhet ki: 24, 25, 31, 29, 35, 36. Ezek közül két szám osztható hárommal, vagyis két esetben biztosan 3-mal osztható az összeg. A további négy esetben nem kaphatunk 3-mal osztható számot, mert a kéttagú összeg egyik tagja osztható 3-mal, a másik pedig nem. Így a keresett valószínűség $\dfrac{1}{3}$.

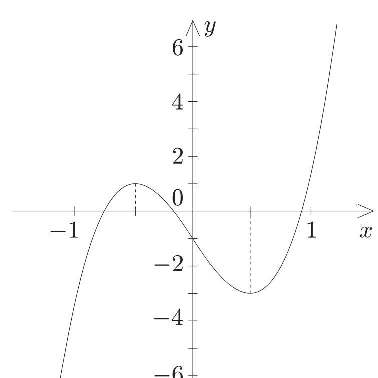
7. *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb: $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}$.* (*16 pont*)

Megoldás. Tudjuk, hogy $f(x)$ mindenütt folytonos függvény. Mivel az

$$f'(x) = 24x^2 - 6$$

függvény zérushelyei a $-\dfrac{1}{2}$ és az $\dfrac{1}{2}$, azért itt lehet az eredeti függvénynek lokális szélsőértéke. Ezeken a helyeken az első derivált előjelet vált (pozitívból negatívba, illetve negatívból pozitívba megy át), így az első helyen lokális maximuma, a második helyen lokális minimuma van a függvénynek. Számolással kapjuk, hogy $f(-0{,}5) = 1$ és $f(0{,}5) = -3$. Vagyis a $\left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ intervallumon van zérushelye a függvénynek.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x$
f	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$



[1] A „páratlan” szó múlt havi feladatsorunkban kimaradt, ettől a feladat pontatlanná vált. A hibáért elnézést kérünk.

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}(8x^3-6x-1)=\infty$, azért az $\left]\frac{1}{2};\infty\right[$ intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^3-6x-1)=-\infty$, azért a $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Azaz van három különböző zérushelye.

Mivel $f(0)=-1$, azért a középső zérushelyről az is megállapítható, hogy a $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ intervallumon található. Ez azt jelenti, hogy két negatív és egy pozitív zérushellyel rendelkezik a függvény. Tudjuk, hogy $\cos\frac{\pi}{9}>0$, ezért ha az $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$ valóban zérushelye a függvénynek, akkor az a három zérushely közül csakis a legnagyobb lehet.

A $\frac{\pi}{9}$ háromszorosa $\frac{\pi}{3}$, ami nevezetes szög. Tudjuk, hogy $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Alkalmazzuk a $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ összefüggést:

$$\cos\frac{\pi}{3}=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}.$$

Ezt 2-vel szorozva és rendezve kapjuk:

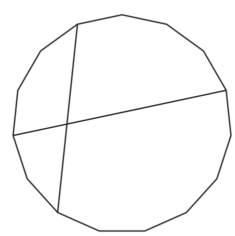
$$8\cos^3\frac{\pi}{9}-6\cos\frac{\pi}{9}-1=0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $f(x)=8x^3-6x-1$ hozzárendelésű függvénynek az $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$ a zérushelye.

8. *a) Egy szabályos sokszöget két átlójával négy síkidomra vágtunk: négyszögre, ötszögre, hatszögre és nyolcszögre. Hány oldala van a szabályos sokszögnek?*

b) Egy szabályos tizenötszög csúcsait pirosra, a belsejében pedig néhány pontot zöldre színeztünk. Az így kapott színes pontokat minden lehetséges módon páronként összekötöttük egy-egy szakasszal. Azon szakaszok száma, amelyeknek a végpontjai azonos színűek megegyezik azon szakaszok számával, amelyeknek a két végpontja nem azonos színű. Hány darab zöld pontot vettünk fel a sokszög belsejében? *(16 pont)*

Megoldás. *a)* A feladatban szereplő két átló metszi egymást. Az átlók egy-egy darabja oldala lesz a keletkezett sokszögeknek. Mind a négy sokszögben két-két oldal az átlók egy-egy darabja lesz. Ezért a négyszögnek kettő, az ötszögnek három, a hatszögnek négy, a nyolcszögnek pedig hat olyan oldala van, amely az eredeti sokszögnek is oldala. Az eredeti sokszög minden oldala szerepel valamelyik keletkező sokszög oldalaként. Ezért az eredeti sokszögnek $2+3+4+6$, azaz 15 oldala van.



b) Legyen a zöld pontok száma n. A piros végű szakaszok száma $\binom{15}{2}$, a zöld végű szakaszok száma $\binom{n}{2}$. Azon szakaszok száma, amelyeknek az egyik vége piros, a másik pedig zöld, $15n$. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\binom{n}{2}+\binom{15}{2}=15n, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{n(n-1)}{2}+\frac{15\cdot 14}{2}=15n.$$

Rendezzük az egyenletet: $n^2-31n+210=0$. A két gyök: $n_1=10$, $n_2=21$. Vagyis a zöld pontok száma 10 vagy 21.

9. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)^x}+\sqrt{\left(7-4\sqrt{3}\right)^x}=\frac{5}{2}. \qquad \textit{(16 pont)}$$

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet, felhasználva, hogy $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=\left(7+4\sqrt{3}\right)$ és hasonlóképpen $\left(2-\sqrt{3}\right)^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)$:

$$\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x}}=\frac{5}{2}, \quad \text{innen} \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{5}{2}.$$

Legyen $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=a$, ekkor $\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{a}$.

Megoldjuk az $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$ egyenletet, amit $2a$-val szorozva és rendezve kapjuk, hogy:

$$2a^2-5a+2=0.$$

A gyökök: $a_1 = 2$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$.

A $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2$ egyenletből kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{\lg 2}{\lg\left(2+\sqrt{3}\right)} \approx 0{,}5263.$$

A $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{2}$ egyenletből kapjuk, hogy

$$x_2 = \frac{\log \frac{1}{2}}{\lg\left(2+\sqrt{3}\right)} = -\frac{\lg 2}{\lg\left(2+\sqrt{3}\right)} \approx -0{,}5263.$$