

I. rész

1. Határozzuk meg azokat az a , b , c egész számokat, melyekre teljesül a következő két tulajdonság:

i) A három szám összege fele a szorzatuknak;

ii) Az egyik szám egyenlő a másik kettő összegével.

(11 pont)

Megoldás. Feltehetjük, hogy $a = b + c$, így $2(a + b + c) = 4a = abc$, azaz

$$a(bc - 4) = 0.$$

I. eset: $a = 0$. Ekkor $b = -c$ (c tetszőleges egész).

II. eset: $bc = 4$. Vagyis a 4-et kell két egész szám szorzataként előállítanunk. Ekkor a megoldások:

$$\begin{array}{lll} a = 5, & b = 4, & c = 1; & a = -5, & b = -4, & c = -1; \\ a = 5, & b = 1, & c = 4; & a = -5, & b = -1, & c = -4; \\ a = 4, & b = 2, & c = 2; & a = -4, & b = -2, & c = -2. \end{array}$$

2. Két, egy síkban haladó repülőgép repülési pályája két, egymásra merőleges egyenes. Egy adott pillanatban pályájuk képzeletbeli metszéspontjától az egyik repülőgép 2 km, a másik 2,5 km távolságban van. Az előbbi gép sebessége 270 km/h, a másiké 180 km/h. A gépek vészjelzője figyelmezteti a pilótákat, ha 1 km-nél jobban megközelítik egymást.

a) Határozzuk meg, hány másodperc múlva lesz a két repülőgép távolsága minimális.

(9 pont)

b) Megszólal-e a vészjelző a repülőgépeken?

(3 pont)

Megoldás. a) Tegyük fel, hogy a gépek a metszéspont felé közelítenek. Az egyik gép sebessége 75 m/s, a másiké 50 m/s. Pályáik metszéspontjától t másodperc elteltével az egyik gép $2000 - 75t$, a másik $2500 - 50t$ méter távolságban lesz. A két gép távolsága:

$$d = \sqrt{(2000 - 75t)^2 + (2500 - 50t)^2},$$

aminek a minimumát keressük. Ez akkor minimális, amikor

$$d^2 = 8\,125\,t^2 - 550\,000\,t + 10\,250\,000$$

minimális. A kifejezés minimumhelye: $t = \frac{550\,000}{2 \cdot 8\,125} \approx 33,85$ másodperc. (Ekkor az első gép már túl lesz az útvonalak metszéspontján.)

b) A kapott t értéket behelyettesítve a távolságképletbe kapjuk, hogy a két gép minimális távolsága 971 méter, tehát a vészjelzők megszólalnak.

3. Egy nem állandó számtani sorozat első három eleme közül a másodikat és a harmadikat felcserélve egy mértani sorozat első három elemét kapjuk. A számtani sorozat első eleme egyenlő a második és a harmadik elem szorzatának ellentettjével. Határozzuk meg a számtani sorozatot.

(14 pont)

Megoldás. A számtani sorozat első elemét a -val, differenciáját d -vel jelölve a számtani sorozat elemei sorban a , $a + d$ és $a + 2d$; a mértani sorozaté pedig sorban a , $a + 2d$ és $a + d$. A mértani sorozat tulajdonsága szerint:

$$\frac{a + d}{a + 2d} = \frac{a + 2d}{a}. \text{ Ezt átalakítva adódik, hogy } a = -\frac{4}{3}d \text{ (} d \neq 0 \text{).}$$

A második feltétel szerint $a = -(a + d)(a + 2d)$. Behelyettesítve az a -ra kapott kifejezést kapjuk, hogy $d = -6$ és $a = 8$.

A keresett számtani sorozat tehát $a_n = 8 - (n - 1) \cdot 6$, ami valóban megfelel a feltételeknek.

4. Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze

a) egy ötfős csoportot;

(2 pont)

b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot;

(4 pont)

c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie;

(4 pont)

d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki?

(4 pont)

Megoldás. a) $\binom{30}{5} = 142\,506$.

$$b) \binom{30}{5} + \binom{30}{4} + \binom{30}{3} + \binom{30}{2} = 174\,406.$$

c) Ekkor a maradék 29 diákból kell négyet választanunk: $\binom{29}{4} = 23\,751$.

d) Az első kérdésnél kapott eredményt szorozzuk 5-tel, hiszen az öt tag közül bármelyikük lehet a csoportvezető:
 $\binom{30}{5} \cdot 5 = 712\,530$.

II. rész

5. Egy egyenes körkúp alakú edény alapkörének sugara 12 cm, magassága 18 cm. Az edényt csúcsára állítjuk, és 1 liter vizet töltünk bele.

- a) Milyen magasan áll benne a víz? (8 pont)
b) Mennyi festékre lenne szükség az edény külső falának befestéséhez, ha 1 liter festék 8 m^2 felületre elegendő? (8 pont)

Megoldás. a) A betöltött víz által elfoglalt rész hasonló az edényhez, tehát egy olyan egyenes körkúp, melynek magassága másfélszerese az alapkör sugarának. Sugarát ϱ -val jelölve

$$1000 = \frac{\varrho^2 \pi \cdot 1,5\varrho}{3}, \quad \text{ahonnan} \quad 1,5\varrho = 1,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{3000}{1,5\pi}} \approx 12,9 \text{ cm.}$$

Tehát a víz kb. 12,9 cm magasan áll benne.

b) A kúppalást felszínét kell kiszámolnunk. Pitagorasztételéből a kúp alkotója: $a \approx 21,63 \text{ cm}$. A kúppalást felszíne: $A = r\pi a \approx 815,43 \text{ cm}^2$.

Mivel 1000 cm^3 festék $80\,000 \text{ cm}^2$ felület befestéséhez elegendő, azért az edény falához elég lesz $10,19 \text{ cm}^3 = 10,19$ milliliter festék.

6. A hagyományos ötöslottón egy szelvénnel játszva a nyereség (legalább két találat) esélye kb. 2,33%. A nagy nyereség reményében 100 véletlenszerűen kitöltött szelvényt küldünk játékba.

- a) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy nyertes szelvényünk? (5 pont)
b) Mekkora valószínűséggel lesz pontosan három nyertes szelvényünk? (5 pont)
c) Hány szelvényt kellene feladni egy adott héten, hogy legalább 99% valószínűséggel legyen köztük nyertes szelvény? (6 pont)

Megoldás. a) $P(\text{legalább 1 nyertes}) = 1 - P(\text{egy se nyer}) = 1 - (1 - 0,0233)^{100} \approx 0,905$.

b) $P(3 \text{ nyertes}) = \binom{100}{3} \cdot 0,0233^3 \cdot (1 - 0,0233)^{97} \approx 0,208$.

c) $0,99 < P(\text{van nyertes}) = 1 - P(\text{egy se nyer})$, azaz

$$0,01 > P(\text{egy se nyer}) = (1 - 0,0233)^n.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve: $-2 > n \cdot \lg 0,9767$. Ebből kapjuk, hogy

$$n > \frac{-2}{\lg 0,9767} \approx 195,3.$$

Tehát legalább 196 szelvénnel kellene játszsanunk.

7. Egy számunkra megközelíthetetlen hegy tetején álló adótorony magasságát szeretnénk meghatározni. A hegy lábával azonos magasságban elterülő síkságon felvesszük az egymástól 80 méterre lévő A és B pontokat úgy, hogy a B pontból az A pont és a torony (ebben a sorrendben) egy irányban látszódnak. Az A pontból a torony alját $41^\circ 30'$ -es, a tetejét 49° -os, a B pontból a torony alját $34^\circ 15'$ -es szög alatt látjuk.

- a) Milyen magas a hegy? (7 pont)
b) Milyen magas a torony? (5 pont)
c) Mekkora szög alatt látszik a B pontból a torony teteje? (4 pont)

Megoldás. a) Az adótorony tetejét jelölje T , alját T' , a toronynak a talaj síkjára eső merőleges vetülete pedig legyen H . Ezekkel a jelölésekkel $T'AH \sphericalangle = 41,5^\circ$, tehát $T'AB \sphericalangle = 138,5^\circ$, $T'BA \sphericalangle = 34,25^\circ$, míg $AT'B \sphericalangle = 7,25^\circ$. A $T'AB$ háromszögben a szinusztételt felírva:

$$\frac{T'A}{80} = \frac{\sin 34,25^\circ}{\sin 7,25^\circ},$$

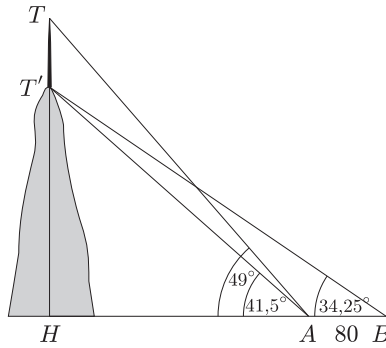
s ebből

$$T'A = 80 \cdot \frac{\sin 34,25^\circ}{\sin 7,25^\circ} \approx 356,8.$$

A $T'HA$ háromszögből:

$$T'H = T'A \cdot \sin 41,5^\circ \approx 236,4.$$

Vagyis a hegy magassága kb. 236,4 m.



b) A $TT'A$ háromszögben $T'AT\angle = 7,5^\circ$ és $T'TA\angle = 41^\circ$. A szinusz tétellel:

$$\frac{TT'}{T'A} = \frac{\sin 7,5^\circ}{\sin 41^\circ}, \quad \text{ebből} \quad TT' = 356,8 \cdot \frac{\sin 7,5^\circ}{\sin 41^\circ} \approx 71.$$

Vagyis kb. 71 m magas az adótorony.

c) $HA = \frac{T'H}{\operatorname{tg} 41,5^\circ} \approx 267,2.$

$$\operatorname{tg} HBT\angle = \frac{TH}{HB} = \frac{TT' + T'H}{HA + AB} = \frac{307,4}{347,2},$$

ahonnan $HBT\angle \approx 41,5^\circ$. Vagyis a torony teteje a B pontból kb. $41,5^\circ$ -os szögben látszik.

8. Adott a koordináta-rendszerben az

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

egyenletű k_1 kör.

a) Határozzuk meg a k_1 körbe írt derékszögű háromszög harmadik csúcsának koordinátáit, ha két ismert csúcsának koordinátái $(-2; 4)$ és $(5; 5)$. (6 pont)

b) Keressünk az x tengelyen olyan pontot, melyből a k_1 körhöz és az

$$(x - 12)^2 + y^2 = 4$$

egyenletű k_2 körhöz húzott érintők hosszúsága egyenlő.

(10 pont)

Megoldás. a) A kör egyenletét átalakítva: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Tehát a kör középpontja a $P(2; 1)$ pont, sugara pedig 5 egység.

A két megadott pont valóban rajta van a körön.

Thalész tétele miatt a két pont által meghatározott szakasz a derékszögű háromszögnek csak befogója lehet, a háromszög harmadik csúcsa pedig a megadott pontok valamelyikén áthaladó átmérő átellesenes pontja.

A kör középpontját felhasználva ezek könnyen meghatározhatók: $(6; -2)$ vagy $(-1; -3)$.

b) A keresett T pont koordinátái legyenek $(t; 0)$, az egyik érintési pont k_1 -en legyen S_1 . A k_2 kör középpontja $U(12; 0)$, sugara 2 egység, az egyik érintési pont itt legyen S_2 . TS_1P és TS_2U háromszögek derékszögűek, a TS_1 és TS_2 érintőszakaszok egyenlők.

A Pitagorasz-tételeket felírva:

$$TS_1^2 = TP^2 - PS_1^2 = (t - 2)^2 + (0 - 1)^2 - 5^2;$$

$$TS_2^2 = TU^2 - US_2^2 = (t - 12)^2 - 2^2.$$

$TS_1 = TS_2$ miatt: $(t - 2)^2 - 24 = (t - 12)^2 - 4$. Ezt megoldva $t = 8$ adódik.

Vagyis a keresett pont a $(8; 0)$.

9. a) Határozzuk meg az $f(x) = px^2 + 2x + q$ függvény grafikonja, valamint az $x = 4$ és az $x = 6$ egyenesek által közrezárt síkidom területét, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^2 f(x) dx = -2 \quad \text{és} \quad \int_2^4 f(x) dx = 54. \quad (9 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg azon k értékeket, melyekre

$$\int_0^k f(x) dx = 0. \quad (7 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A két integrál értékéből egy-egy egyenletet írhatunk fel a két ismeretlen paraméterre:

$$\int_0^2 (px^2 + 2x + q) dx = \left[\frac{px^3}{3} + x^2 + qx \right]_0^2 = \frac{8p}{3} + 4 + 2q = -2,$$
$$\int_2^4 (px^2 + 2x + q) dx = \left[\frac{px^3}{3} + x^2 + qx \right]_2^4 = \left(\frac{64p}{3} + 16 + 4q \right) - \left(\frac{8p}{3} + 4 + 2q \right) =$$
$$= \frac{56p}{3} + 12 + 2q = 54.$$

Rendezve a két egyenletet kapjuk, hogy $8p + 18 + 6q = 0$ és $56p - 126 + 6q = 0$. Az egyenletrendszer megoldása: $p = 3$, $q = -7$. A keresett terület:

$$\int_4^6 3x^2 + 2x - 7 = \left[x^3 + x^2 - 7x \right]_4^6 = (216 + 36 - 42) - (64 + 16 - 28) = 210 - 52 = 158.$$

b)

$$\int_0^k 3x^2 + 2x - 7 = \left[x^3 + x^2 - 7x \right]_0^k = k^3 + k^2 - 7k = k(k^2 + k - 7) = 0.$$

A harmadfokú egyenlet megoldásai: $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \approx 2,19$, $k_3 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \approx -3,19$.