

I. rész

1. a) Egy urnában 100 cédula van 1-től 100-ig megszámozva. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre két cédulát kihúzával ikerprím számok lesznek a cédulákon? (Ikerprím két olyan prím szám, amelyek a természetes számok sorozatában egymás után következő páratlan számok.)

b) Mennyi a valószínűsége a „hármás iker” húzásának, ha három cédulát húzunk ki egyszerre? (11 pont)

Megoldás. a) 1-től 100-ig összesen 8 pár ikerprím szám van: (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61) és a (71; 73). A 100 cédula közül kettőt $\binom{100}{2} = 4950$ -féleképpen lehet kiválasztani, ezért a keresett valószínűség $p = \frac{8}{4950} \approx 0,0016$.

b) „Hármás iker” csak egyféleképpen húzható, mert három egymást követő páratlan szám között mindig lesz egy 3-mal osztható. A 3-mal osztható számok között pedig egyetlen prím szám van, a 3. A „hármás iker” így a (3; 5; 7).

A keresett valószínűség:

$$p = \frac{1}{\binom{100}{3}} = \frac{1}{161\,700} \approx 6,184 \cdot 10^{-6}.$$

2. Osztható-e a $\binom{38}{19}$ binomiális együttható 17-tel? (12 pont)

Megoldás.

$$\binom{38}{19} = \frac{38!}{19! \cdot 19!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 34 \cdot \dots \cdot 38}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19)^2}.$$

A számláló és a nevező is a 17-nek pontosan a második hatványával osztható, ezért 17^2 -nel lehet egyszerűsíteni. Tudjuk, hogy $\binom{38}{19}$ egész szám.

Az előzőek alapján látható, hogy a $\binom{38}{19}$ binomiális együttható nem osztható 17-tel.

3. Az

$$x^2 + y^2 + kx - \frac{k^2}{2}y + 1 = 0$$

kör egyenletében határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy a kör mindkét koordináta-tengelyt érintse. (14 pont)

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + \left(y - \frac{k^2}{4}\right)^2 - \frac{k^4}{16} + 1 = 0,$$

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k^2}{4}\right)^2 = \frac{k^4}{16} + \frac{k^2}{4} - 1.$$

A kör középpontja $K\left(-\frac{k}{2}; \frac{k^2}{4}\right)$, sugara

$$r = \sqrt{\frac{k^4}{16} + \frac{k^2}{4} - 1},$$

feltéve, hogy a gyökjel alatti kifejezés pozitív.

A kör akkor érinti mindkét koordináta-tengelyt, ha $\left|-\frac{k}{2}\right| = \frac{k^2}{4}$.

Az egyenletnek három megoldása van: $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ vagy $k_3 = 0$.

A $k_1 = -2$ és a $k_2 = 2$ esetén pozitív valós szám lesz az r ($r = 1$). Ezek adják a két megoldást: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ és $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

4. a) Oldjuk meg az $[x]^2 + 3 \cdot [x] - 10 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán. (Az $[x]$ az x -nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelenti.)

b) Milyen p és q egész számok esetén elégíti ki egyetlen egység hosszúságú számköz az $[x]^2 + p[x] + q = 0$ egyenletet? (14 pont)

Megoldás. a) Az $[x]$ -re két értéket kapunk: $[x]_1 = 2$, $[x]_2 = -5$.

Ha $[x]_1 = 2$, akkor $x \in [2; 3[$.

Ha $[x]_1 = -5$, akkor $x \in [-5; -4[$.

Vagyis a megoldás: $x \in [-5; -4[\cup [2; 3[$.

b) Az adott egyenletből $[x]$ -re egy megoldást kell kapnunk, ha

$$D = p^2 - 4q = 0 \quad (p; q \in \mathbb{Z}).$$

Vagyis a q négyzetszám és a p páros szám között ha fennáll a $p^2 = 4q$ összefüggés, akkor az egyenletnek a megoldása egyetlen, egység hosszúságú számköz.

II. rész

5. Határozzuk meg az $x^3 + (3 - 2a)x^2 - a^2x - 3a^2 + 2a^3 = 0$ egyenletben az „ a ” valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet valós gyökei valamilyen sorrendben mértani sorozatot alkossanak. (16 pont)

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a harmadfokú kifejezést:

$$x^3 + (3 - 2a)x^2 - a^2x - a^2(3 - 2a) = 0,$$

$$x(x^2 - a^2) + (3 - 2a) \cdot (x^2 - a^2) = 0,$$

$$(x^2 - a^2) \cdot (x + 3 - 2a) = 0,$$

$$(x - a) \cdot (x + a) \cdot (x + 3 - 2a) = 0.$$

Ebből az alakból leolvashatók az egyenlet gyökei: $x_1 = a$, $x_2 = -a$ és $x_3 = 2a - 3$.

Három eset lehetséges.

I. A mértani sorozatban középső elem az $x_2 = -a$. Ekkor $(-a)^2 = a \cdot (2a - 3)$. Ennek az egyenletnek két gyöke van: $a_1 = 3$, $a_2 = 0$.

Az $a_1 = 3$ esetén a mértani sorozat elemei: $3; -3; 3$ ($q = -1$).

Az $a_2 = 0$ nem ad megoldást.

II. A mértani sorozat középső eleme az $x_1 = a$. Ekkor $a^2 = -a(2a - 3)$. Ennek az egyenletnek két gyöke van: $a_3 = 1$, $a_4 = 0$.

Az $a_3 = 1$ esetén a mértani sorozat elemei: $-1; 1; -1$ ($q = -1$).

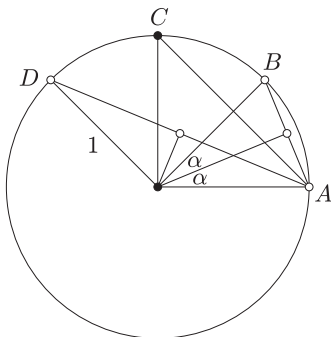
Az $a_4 = 0$ nem ad megoldást.

III. A mértani sorozat középső eleme az $x_3 = 2a - 3$. Ekkor $(2a - 3)^2 = -a^2$. Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

Vagyis két megfelelő paramétert találtunk: $a_1 = 3$, $a_3 = 1$.

6. Egy szabályos sokszögben A , B , C és D a sokszög négy egymás utáni csúcsa, az AC szakasz négyzetes közepe az AB és AD szakaszoknak. Hány oldalú a sokszög? (16 pont)

Megoldás. Legyen a sokszög köré írt kör sugara 1. Jelöljük az AB -hez tartozó középponti szöveget 2α -val. Ekkor $AB = 2 \sin \alpha$, $AC = 2 \sin 2\alpha$ és $AD = 2 \sin 3\alpha$.



A feladat feltétele szerint $AC = \sqrt{\frac{AB^2 + AD^2}{2}}$, azaz $2AC^2 = AB^2 + AD^2$. Ebből következik, hogy

$$2 \cdot 4 \cdot \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 3\alpha,$$

azaz $2 \sin^2 2\alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 3\alpha$. Az addíciós tételek felhasználásával a

$$8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + [\sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)]^2$$

egyenlethez jutunk. Mivel $\sin^2 \alpha \neq 0$, azért eloszthatjuk vele az egyenlet mindkét oldalát. Így a $8 \cos^2 \alpha = 1 + (3 - 4 \sin^2 \alpha)^2$ egyenletet kapjuk. További alakításokkal:

$$8 - 8 \sin^2 \alpha = 1 + 9 - 24 \sin^2 \alpha + 16 \sin^4 \alpha, \quad 8 \sin^4 \alpha - 8 \sin^2 \alpha + 1 = 0.$$

Ebből kapjuk, hogy $\sin^2 \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$, amihez $\cos^2 \alpha = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4}$ tartozik. Ekkor

$$\sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4 \cdot \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Csak abban az esetben kaphatunk szabályos sokszöget, ha a 2α fokban mért értéke n -ed része 360° -nak, ahol $n \geq 4$. Az egyetlen megfelelő érték a $2\alpha = 45^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a szabályos sokszög nyolcoldalú.

7. a) Oldjuk meg a

$$2x^2 - \left[2\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] x + \sin 2\alpha = 0$$

egyenletet, ahol az α valós paraméter.

b) Mutassuk meg, hogy az $f(\alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény a $g(\alpha) = \cos^2 \alpha$ hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény transzformáltja. (16 pont)

Megoldás. a) Az egyenlet a következő alakban is írható az addíciós tételek segítségével:

$$x^2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)x + \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggést alkalmazva az egyenlet gyökei: $x_1 = \sin \alpha$, $x_2 = \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} b) \quad f(\alpha) &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha. \end{aligned}$$

8. a) Mutassuk meg, hogy az $y = x^3 + ax^2 + (2a - 3)x + a - 2$ görbesereg minden tagja egy ponton megy át, ahol „a” tetszőleges valós szám. Adjuk meg ennek a fix pontnak a koordinátáit.

b) Hogyan kell megválasztani az „a” paraméter értékét, hogy a hozzá tartozó görbe $x_0 = 2$ pontjában húzott érintője áthaladjon a $P(-1; 0)$ ponton? (16 pont)

Megoldás. a) Két tetszőleges a értékhez tartozó görbe közös pontja megadja a fix pontot. Legyen $a = 0$, illetve $a = 1$. Ha $a = 0$, akkor $y = x^3 - 3x - 2$. Ha $a = 1$, akkor $y = x^3 + x^2 - x - 1$.

Meghatározzuk a két görbe közös pontját:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 - 3x - 2, \quad \text{azaz} \quad x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Vagyis $x = -1$.

A két görbe közös pontja $P(-1; 0)$, és ez valóban kielégíti a görbesereg minden tagjának egyenletét.

b) Felhasználjuk, hogy a keresett görbe $x_0 = 2$ pontjához tartozó érintőjének meredekségét a derivált helyettesítési értéke adja. Az $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a - 3$. Ebből $f'(2) = 6a + 9 = m_e$. Az érintési pont második koordinátája $f(2) = 9a$, ezért az érintési pont $E(2; 9a)$. Az érintő egyenlete az a paraméter függvényében $y - 9a = (6a + 9) \cdot (x - 2)$. Mivel át kell mennie a $P(-1; 0)$ ponton, azért $-9a = -3(6a + 9)$.

Vagyis a megfelelő paraméter: $a = -3$.

9. a) Határozzuk meg az „a” paraméter értékét, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) = 0,$$

ahol $f(x) = ax^2 - 3x + 2$.

b) Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 3x + 2$ hozzárendeléssel megadott függvény grafikonja és az x tengely által meghatározott síkidom területét. (16 pont)

Megoldás. a) Először számítsuk ki az $f(x)$ függvény $\frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ helyen vett helyettesítési értékét:

$$\begin{aligned} f \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) &= a \cdot \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) + 2 = \\ &= \frac{a(2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) - 3 \cdot (2^{2x} - 1) + 2 \cdot (2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1)}{2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1} = \\ &= \frac{(a - 1) \cdot 2^{2x} - (2a - 4) \cdot 2^x + a + 5}{2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1}. \end{aligned}$$

Ennek határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) = a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ezért $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

b) Az $f(x)$ függvény zérushelyei: $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$. A kérdéses terület:

$$T = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \right| = \left| \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \right| = \frac{1}{6}.$$