I. rész

1. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}(x+y)(x-4y+11) &= x-4y+11,\\ (4x-y)(2x-3y-8) &= 16(2x-3y-8).\end{aligned}$$ (*11 pont*)

2. Egy 60 cm széles vászonnak 120 cm-es darabját találtuk meg otthon a szekrényben, amelynek egyik sarkából korábban már levágtunk egy 30×30 cm-es derékszögű háromszöget. A megmaradt anyagból az eredeti téglalap oldalaival párhuzamos vágásokkal szeretnénk a legnagyobb területű téglalapot kiszabni. Mekkora lesz az új téglalap oldalainak a hossza? (*12 pont*)

3. Adott az $\{a_n\} = \{9n+8\}$ számtani sorozat. Ennek elemeiből képezzük a $\{b_n\} = \left\{a_{n+1}^2 - a_n^2\right\}$ sorozatot.

a) Mennyi a $\{b_n\}$ első 2007 tagjának összege?

b) Igazoljuk, hogy a $\{b_n\}$ is számtani sorozat.

c) Tagja-e a $\{b_n\}$ sorozatnak a 2007? (*14 pont*)

4. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre illeszkedik a $P(8;9)$ pont, az $e_1\colon 2x+3y-21=0$ és az $e_2\colon 2x+3y-9=0$ egyenletű egyeneseket pedig olyan pontokban metszi, amelyek ordinátáinak különbsége 4. (*14 pont*)

II. rész

5. A trapézt két átlója négy háromszögre bontja. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe 19 cm^2 és 63 cm^2. Mekkora a trapéz területe? (*16 pont*)

6. Egy urnába golyókat helyeztünk, melyekre számokat írtunk: egyre 1-est, kettőre 9-est, háromra 3-ast, és a golyókat egyforma valószínűséggel húzzuk ki.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy kétszer húzva visszatevés nélkül azonos számmal jelzett golyót veszünk ki?

b) Vegyünk ki négy golyót. Kirakhatunk-e belőlük olyan $4k+1$ alakú pozitív egész számot, melyben a számjegyek szorzata 243, és a szám kisebb, mint a számjegyei összegének a 100-szorosa? (*16 pont*)

7. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben az oldalak és szögek szokásos jelölése mellett fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$ (*16 pont*)

8. Adott a térbeli koordináta-rendszerben a következő nyolc pont: $A(4;0;0)$, $B(4;4;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;0)$, $E(4;0;8)$, $F(4;4;8)$, $G(0;4;8)$, $H(0;0;8)$.

a) Legyen P a DH élen D-től 1 egységre lévő pont, Q pedig a BF él felezőpontja. Mekkora szöget zár be a PB és a PQ szakasz?

b) Az AE szakaszon fekvő R pontra igaz, hogy a CR egyenes metszi a PQ egyenest egy S pontban. Adjuk meg az S és R pontok koordinátáit. (*16 pont*)

9. A következő függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük. Legyen $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2$.

a) Írjuk fel a $h(x) = f\left[g(x)\right] - g\left[f(x)\right]$ függvény $x=3$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjének az egyenletét.

b) Számítsuk ki az $[1;3]$ intervallumon a $k(x)=g(x)-f(x)$ függvény görbéje alatti területet. (*16 pont*)