

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. Adottak az $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok. Mindegyik i -re ($1 \leq i \leq n$) legyen

$$d_i = \max \{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min \{a_j : i \leq j \leq n\}$$

és legyen

$$d = \max \{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ valós számokra

$$(*) \quad \max \{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}.$$

(b) Mutassuk meg, hogy vannak olyan $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ valós számok, amelyekre $(*)$ -ban az egyenlőség áll fenn.



Lovász László Miklós megoldása. (a) Mivel $\max \{a_j : 1 \leq j \leq i\} \geq a_i$, és $\min \{a_j : i \leq j \leq n\} \leq a_i$, nyilván $d_i \geq 0$. Jelöljön k egy olyan indexet, amelyre $d = d_k$; hasonlóan, legyen $a_\ell = \max \{a_j : 1 \leq j \leq k\}$ és $a_m = \min \{a_j : k \leq j \leq n\}$. Tegyük fel, hogy a feladat állításával ellentétben léteznek olyan $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ valós számok, amelyekre $|x_i - a_i| < \frac{d}{2}$, minden $i \leq n$ -re. Ekkor azonban az

$$a_\ell - x_\ell \leq |x_\ell - a_\ell| < \frac{d}{2}, \quad x_m - a_m \leq |x_m - a_m| < \frac{d}{2}$$

egyenlőtlenségek összege: $a_\ell - a_m + x_m - x_\ell < d$.

Másrészt $\ell \leq k \leq m$ miatt $\ell \leq m$, és ezért $x_m \geq x_\ell$. Így viszont $a_\ell - a_m + x_m - x_\ell = d_k + x_m - x_\ell \geq d$, ami az előbbi egyenlőtlenségnek ellentmond.

(b) Minden $1 \leq i \leq n$ indexre legyen

$$x_i = \frac{\max \{a_j : 1 \leq j \leq i\} + \min \{a_j : i \leq j \leq n\}}{2}.$$

Ez az x_i sorozat valóban növekedő, mivel az összeg mindkét tagja monoton növekvő az i függvényében: bővebb számhalmaz maximuma legalább akkora, mint a szűkebbé, egy halmazt szűkítve pedig a minimum ugyancsak nő. Az $A_i = \max \{a_j : 1 \leq j \leq i\}$ és $B_i = \min \{a_j : i \leq j \leq n\}$ jelölésekkel $A_i \geq a_i \geq B_i$, $d_i = A_i - B_i$, így

$$x_i - a_i \leq x_i - B_i = \frac{A_i + B_i}{2} - B_i = \frac{A_i - B_i}{2} = \frac{d_i}{2},$$

$$a_i - x_i \leq A_i - x_i = A_i - \frac{A_i + B_i}{2} = \frac{A_i - B_i}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

Tehát minden i -re $|x_i - a_i| \leq \frac{d_i}{2} \leq \frac{d}{2}$, azaz $\max \{|x_j - a_j| : 1 \leq j \leq n\} \leq \frac{d}{2}$; az (a)-ban kapott általános becsléssel összevetve ez igazolja, hogy a választott x_i számok mellett $(*)$ -ban egyenlőség áll.

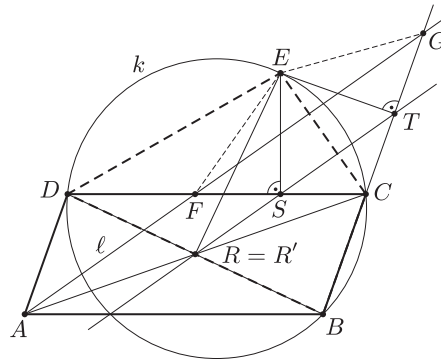
2. Tekintsünk öt olyan A, B, C, D, E pontot, amelyekre $ABCD$ egy paralelogramma, $BCED$ pedig egy húrnégyszög. Legyen ℓ egy, az A ponton átmenő egyenes. Tegyük fel, hogy ℓ a DC szakaszt az F belső pontban metszi, a BC egyenest pedig a G pontban. Tegyük fel továbbá, hogy $EF = EG = EC$. Bizonyítsuk be, hogy ℓ a DAB szögfelezője.



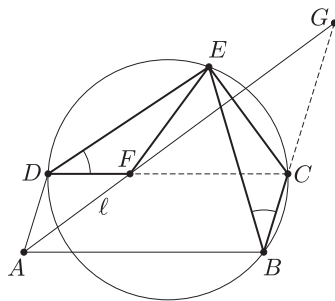
Hujter Bálint megoldása. A $BCED$ körülírt köre legyen k , a CG szakasz felezőpontja (egyben az E -ből CG -re állított merőleges talppontja) T , hasonlóan az FC felezőpontja (ami az E -ből FC -re állított merőleges talppontja) S , az E -ből a DB egyenesre emelt merőleges talppontja R , végül az ST és az AC egyenes metszéspontja R' .

Megmutatjuk, hogy $R' = R$, és ez a pont az $ABCD$ paralelogramma középpontja.

Az S , T , R pontok egy egyenesen, a BCD háromszög E -hez tartozó Simson-egyenesén vannak. Alkalmazzunk 2-szeres nagyítást a C -ből; ennek során T képe G , S képe F . A Simson-egyenes képe ezért ℓ , így R' képe A ; vagyis R' az AC szakasz felezőpontja. Az R' a DB szakasz felezőpontjaként a Simson-egyenesnek DB -vel alkotott metszéspontja, ezért egybeesik R -rel.



Az ER szakasz merőlegesen felezi a DB -t, azaz $EB = ED$. Így az EDF és EBC háromszögek két-két oldala (ED és EB , illetve EF és EC) egyenlő, és megegyeznek az EF és EC oldalakkal szemkölti szögek is, hiszen $\angle EDF = \angle EBC$ egyaránt ugyanahhoz az EC ívhez tartozó kerületi szög k -ban. Mivel $\angle DFE$ az egyenlő szárú EFC háromszög alapon fekvő – tehát hegyes – EFC szögének külső szöge, azért $\angle DFE > 90^\circ$, és hasonlóan $\angle BCE > 90^\circ$. Tehát a tompaszögű EDF és EBC háromszögek egybevágók; $DF = BC$.



A paralelogramma párhuzamos oldalai miatt az ADF és a GCF háromszögek megfelelő szögei egyenlők, e két háromszög hasonló, ezért $\frac{GC}{FC} = \frac{AD}{DF}$. Így $AD = BC = DF$ miatt $GC = FC$, vagyis az FCG (és a hozzá hasonló FDA) háromszög egyenlő szárú. A paralelogramma párhuzamos AB és DC oldalai révén az ABG háromszög is hasonló FCG -hez, így ugyancsak egyenlő szárú. Tehát $\angle DAF = \angle DFA = \angle CFG = \angle CGF = \angle FAB$.

3. Egy matematikai verseny résztvevői közül némelyek barátok. A barátság mindig kölcsönös. Nevezzük a versenyzők egy halmazát klikknek, ha akárhogy választva közülük kettőt, ők barátok. (Speciálisan bármelyik, kettőnél kevesebb versenyzőből álló halmaz klikk.) Egy klikk tagjainak a számát a klikk méretének fogjuk nevezni.

Ha tudjuk, hogy ebben a versenyben a legnagyobb méretű klikk mérete páros szám, bizonyítsuk be, hogy elhelyezhetjük a versenyzőket két teremben oly módon, hogy az egyik teremben található legnagyobb méretű klikk mérete egyenlő legyen a másik teremben található legnagyobb méretű klikk méretével.



Gyenizse Gergő megoldása. (1) Tekintsük a barátsági kapcsolatokat megjelenítő G gráf pontjainak egy olyan felosztását egymástól diszjunkt A és B halmazokra, amelyre az A -ban található maximális méretű klikk legalább akkora, mint a B -ben található, és a két méret különbsége a lehető legkisebb. Ha e különbség pozitív, akkor megmutatjuk, hogy az értéke 1. Ellenkező esetben az A pontjait egyesével rakjuk át B -be; egy pont áthelyezésével az A -beli maximális méretű klikk mérete legfeljebb 1-gyel csökken, a B -belié legfeljebb 1-gyel nő, így a különbség legfeljebb 2-vel csökken.

(2) Ha a feladat állítása hamis, akkor tehát az A -beli maximális méretű klikk mérete a , a B -belié pedig $a - 1$. A G -ben nincs $2a$ -klikk, hiszen akkor abból vagy A -ba esne $(a + 1)$ -klikk, vagy B -be egy a -klikk. A feladat feltétele szerint ekkor viszont $(2a - 1)$ -klikk sem létezhet G -ben.

(3) Ha A -nak valamely x pontja nem tartozik hozzá egy A -beli a -klikkhez, akkor nincs olyan B -be eső $(a - 1)$ -klikk, amelynek minden pontja össze van kötve x -szel: ellenkező esetben ugyanis ezt az x pontot B -be áthelyezve az A -beli maximális klikkméret továbbra is a , a B -belié pedig szintén a -ra nőne.

(4) Megmutatjuk, hogy A -ban csupán egyetlen a -klikk található. Tegyük fel ugyanis, hogy van kettő; az egyiket jelölje C , és tegyük át A -nak a C -hez nem tartozó pontjait egyesével B -be. Ennek során B -ben ((3) szerint) nem keletkezhet $(a - 1)$ -nél nagyobb méretű klikk. Legyen p az a pontja A -nak, amelynek átrakása előtt még két a -klikk is található A -ban, utána viszont már csak egy, C . Jelölje továbbá q a C -nek egy olyan pontját, amely nincs összekötve p -vel. (Biztosan van ilyen pont, különben p a C -vel $(a + 1)$ -klikket alkotna.) Tegyük vissza a p után áthelyezett pontokat A -ba, a q pontot pedig rakjuk B -be. Azt állítjuk, hogy ekkor viszont A -ban és B -ben egyaránt $a - 1$ a maximális klikkméret (ami ellentmondás). Valóban, q -val együtt csak C volt a -klikk az A -ban, ami q eltávolításával megszűnik. A (3) szerint q átkerülése előtt B -ben nem keletkezhet a -klikk, tehát csak úgy jöhetne végül létre, hogy q össze van kötve egy eredetileg is B -be tartozó $(a - 1)$ -klikk valamennyi pontjával. Ekkor viszont a következőképpen módosíthatunk: az eredeti A -ból csupán q kerüljön át B -be, ezzel ott létrejön egy a -klikk; A -ban viszont megmarad az a C -től különböző a -klikk, amely korábban p áttételével szűnt csak meg, ezért szükségképpen tartalmazza p -t. Így azonban nem tartalmazza q -t, hiszen p és q nincs összekötve. Ebben az elrendezésben tehát A és B maximális klikkmérete egyaránt a , ami ellentmondás.

(5) Jelölje a (4) szerint egyetlen A -beli a -klikket C , és helyezzük át az A összes, C -n kívüli pontját B -be; ennek során B maximális klikkmérete változatlanul $a - 1$ marad. Ha viszont ezután $C = A$ bármelyik y pontját B -be helyezzük, akkor A maximális klikkmérete $(a - 1)$ -re csökken, ezért – eredeti indirekt feltevésünk értelmében – B -ben a -klikk jön létre, méghozzá (4) szerint pontosan egy, jelöljük D -vel. A D -nek létezik olyan z pontja, ami az A -ból megmaradt $(a - 1)$ -klikk valamelyik pontjával nincs összekötve, hiszen ellenkező esetben a két halmaz $(2a - 1)$ -klikket alkotna G -ben, ellentmondva (2)-nek. Így azonban a z pontot az A -ba téve, ott továbbra is $a - 1$ marad a maximális klikkméret, B -ben pedig $(a - 1)$ -re csökken, mivel D , az egyetlen a -klikk a z eltávolításával megszűnik. Ez ellentmond eredeti indirekt feltevésünknek.

4. Az ABC háromszögben a BCA szögfelezője a körülírt kört az R pontban metszi ($R \neq C$), a BC szakasz felezőmerőlegesét P -ben, az AC szakasz felezőmerőlegesét pedig Q -ban. A BC szakasz középpontja K , az AC szakasz középpontja pedig L . Bizonyítsuk be, hogy az RPK és RQL háromszögek területe egyenlő.



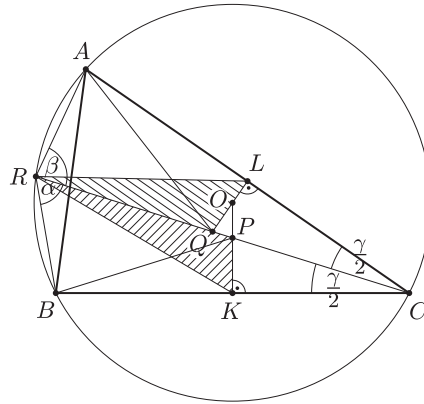
Szűcs Gábor megoldása. Elég belátni, hogy a 2. ábrán jelölt RPK , illetve RQL háromszögeknél kétszerte nagyobb területű RPB és RQA háromszögek területe egyenlő. Az ABC háromszög szögeit jelölje a szokásos módon α, β, γ ; meghatározzuk a szóban forgó két háromszög szögeit. Az ACQ háromszög egyenlő szárú, ezért

$$\angle QAC = \angle QCA = \frac{\gamma}{2}.$$

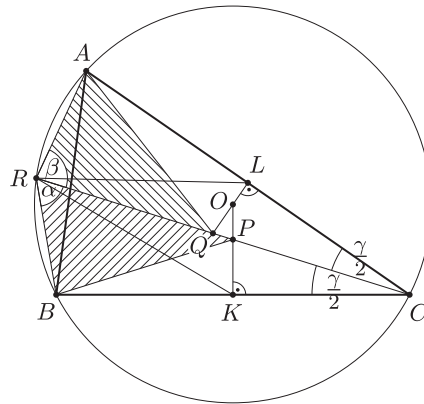
Így $\angle RQA = \angle QCA + \angle CAQ = \gamma$, és ehhez teljesen hasonlóan adódik, hogy $\angle BPR = \gamma$. A kerületi szögek tétele alapján $\angle ARQ = \angle ABC = \beta$, tehát

$$\angle RAQ = 180^\circ - \angle ARQ - \angle RQA = \alpha.$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy a BPR háromszög szögei ugyancsak α, β, γ ; tehát ARQ és BPR hasonló háromszögek. Mivel az AR és RB ívekhez tartozó kerületi szög egyaránt $\frac{\gamma}{2}$, azért $AR = RB$: a két hasonló háromszögben a γ -val szemközti oldalak egyenlő hosszúak, így a két háromszög egybevágó, s ezért a területük is egyenlő.



1. ábra



2. ábra

5. Legyenek a és b pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy ha $4ab - 1$ osztója $(4a^2 - 1)^2$ -nek, akkor $a = b$.



Korándi Dániel megoldása. Legyen r és s egész szám. Ha a legnagyobb közös osztójuk d , akkor $r = dr_1$ és $s = ds_1$, ahol az r_1 és s_1 egészek egymáshoz relatív prímek. Tegyük fel, hogy r osztója s^2 -nek; ekkor $dr_1 \mid d^2 s_1^2$ miatt $r_1 \mid ds_1^2$. Mivel r_1 relatív prím s_1^2 -hez is, r_1 osztója d -nek. Ebből következik, hogy ha d osztója egy t egésznek, akkor $r = dr_1$ osztója t^2 -nek.

$4ab - 1$ és $4a^2 - 1$ legnagyobb közös osztója osztja a két szám különbségét, $4a(b - a)$ -t is, és mivel (mindkét eredeti számhoz hasonlóan) relatív prím $4a$ -hoz, osztója $(b - a)$ -nak is. Az előbbi megjegyzés szerint tehát

$$4ab - 1 \mid (b - a)^2.$$

Megmutatjuk, hogy ez pozitív egész a -ra és b -re csak $a = b$ esetén teljesül. Tegyük fel ezzel szemben, hogy $b \neq a$; legyen például $b > a$. Ekkor

$$k = \frac{(b - a)^2}{4ab - 1} \quad \text{pozitív egész.}$$

Rendezve: $0 = b^2 - 2a(1 + 2k)b + (a^2 + k)$, azaz b gyöke az

$$x^2 - 2a(1 + 2k)x + (a^2 + k) = 0$$

másodfokú egyenletnek. Jelölje az egyenlet másik gyökét c ; ekkor $b + c = 2a(1 + 2k)$ egész, ezért c is egész, és $bc = a^2 + k > 0$ miatt c is pozitív. Valamivel pontosabban:

$$k = \frac{(b - a)^2}{4ab - 1} < \frac{(b - a)^2}{4ab - 4a^2} = \frac{(b - a)}{4a},$$

ezért $2a(1 + 2k) < 2a\left(1 + \frac{b - a}{2a}\right) = b + a$, tehát $0 < c < (b + a) - b = a$. Erre a c egészre (b -hez hasonlóan)

$$k = \frac{(c - a)^2}{4ac - 1},$$

azaz $4ca - 1 \mid (a - c)^2$, és $0 < c < a$. Az $a = b_1 > c = a_1$ pozitív egész számpár tehát ugyanazt az oszthatósági feltételt teljesíti, mint a $b > a$ számpár, csak éppen $b_1 < b$. Az előbbi gondolatmenet így megismételhető b és a helyett b_1 -gyel és a_1 -gyel stb. Ezzel pozitív egészek végtelenül csökkenő $b > b_1 > \dots$ sorozatát kapjuk, ami lehetetlen. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat, és ezzel a feladat állítását is.

6. Legyen n pozitív egész. Tekintsük a háromdimenziós tér $(n + 1)^3 - 1$ pontjából álló alábbi halmazt:

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}.$$

Határozzuk meg azon síkok számának a minimumát, amelyekre igaz az, hogy uniójuk tartalmazza az S halmaz minden pontját, de nem tartalmazza a $(0, 0, 0)$ pontot.



Nagy Csaba megoldása. A feladat kérdésére a válasz: $3n$. Ennyi sík valóban elegendő, például az $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, $\dots$, $x + y + z = 3n$ egyenletű síkok megfelelnek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy néhány síkkal lefedtük S -et, az origót azonban nem. Megmutatjuk, hogy a síkok száma legalább $3n$. Írjuk föl a síkok egyenletét $ax + by + cz + d = 0$ alakban (ahol a, b, c nem mind nulla). Szorozzuk össze az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket; egy $p(x, y, z)$ polinomot kapunk, ami S pontjaiban nulla, az origóban pedig nem. Igazolnunk kell, hogy p foka legalább $3n$. Ehelyett a következő, általánosabb állítást látjuk be:

a, b, c természetes számok, és legyen

$$S(a, b, c) = \{(x, y, z) \mid x \in \{0, 1, \dots, a\}, y \in \{0, 1, \dots, b\}, z \in \{0, 1, \dots, c\}, x + y + z > 0\}.$$

Ha az $f(x, y, z)$ polinom $S(a, b, c)$ pontjaiban nulla, a $(0, 0, 0)$ pontban pedig nem, akkor a foka legalább $a + b + c$.

A bizonyítást az $(a + b + c)$ -re vonatkozó indukcióval végezzük. Ha $a + b + c = 1$, akkor a polinom legalább elsőfokú (azaz nem konstans), hiszen felvesz két különböző értéket. Ha $a + b + c > 1$, akkor tekintsünk egy, a feltételeknek megfelelő f polinomot, a fokát jelölje t . Az a, b, c számok között létezik pozitív, legyen ez például a . Képezzük a $g(x, y, z) = f(x + 1, y, z) - f(x, y, z)$ polinomot. A g polinom foka nyilván legfeljebb t ; viszont $f(x + 1, y, z)$ -ben és $f(x, y, z)$ -ben ugyanazok a megfelelő t -edfokú tagok együtthatói, így ezek kiejtik egymást g -ben. A g foka ezért legfeljebb $t - 1$. A g polinom az $S(a - 1, b, c)$ halmaz pontjaiban nulla, az origóban viszont nem nulla; az indukciós feltevés szerint tehát g foka legalább $a - 1 + b + c$, amiből $t - 1 \geq a - 1 + b + c$, azaz $t \geq a + b + c$ következik.