

1. feladat. Kettőscsillagok

1.1. kérdés. Periódusidő: $3 \text{ nap} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ s}$.

Periódusidő $= \frac{2\pi}{\omega}$, innen a szögsebesség: $\omega = 2,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}$.

1.2. kérdés. Nevezzük α -nak és β -nak az 1. ábrán² látható minimumokat: $\frac{I_1}{I_0} = \alpha = 0,90$ és $\frac{I_2}{I_0} = \beta = 0,63$. Ezek segítségével a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{I_2}{I_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ezekből az összefüggésekből a kérdéses arányok kiszámíthatóak:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} = 1,56, \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} = 1,39.$$

2.1. kérdés. A Doppler-eltolódás alapján: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cong \frac{v}{c}$. A maximális és minimális hullámhosszak: $\lambda_{1,\max} = 5897,7 \text{ Å}$, $\lambda_{1,\min} = 5894,1 \text{ Å}$, $\lambda_{2,\max} = 5899,0 \text{ Å}$, $\lambda_{2,\min} = 5892,8 \text{ Å}$.

A maximális és minimális hullámhosszak különbsége: $\Delta\lambda_1 = 3,6 \text{ Å}$, $\Delta\lambda_2 = 6,2 \text{ Å}$.

Vegyük észre, hogy a Doppler-eltolódás a pályamenti sebességek kétszereséből adódik:

$$v_1 = c \frac{\Delta\lambda_1}{2\lambda_0} = 9,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 = c \frac{\Delta\lambda_2}{2\lambda_0} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

2.2. kérdés. Mivel a tömegközéppont nem mozog hozzánk képest: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = 1,7$.

2.3. kérdés. Felhasználva, hogy $r_i = \frac{v_i}{\omega}$ ($i = 1, 2$), kiszámíthatjuk a csillagok pályájának sugarát: $r_1 = 3,8 \cdot 10^9 \text{ m}$ és $r_2 = 6,5 \cdot 10^9 \text{ m}$.

2.4. kérdés. $r = r_1 + r_2 = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

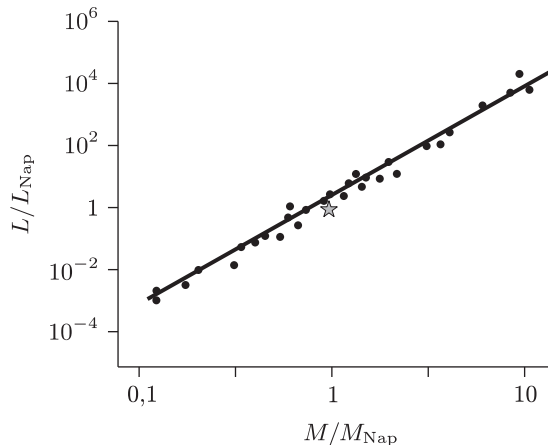
3.1. kérdés. A gravitációs erő megegyezik a tömeg és a centripetális gyorsulás szorzatával:

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = m_2 \frac{v_2^2}{r_2}.$$

Ennek alapján

$$m_1 = \frac{r^2 v_2^2}{G r_2} = 6 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = \frac{r^2 v_1^2}{G r_1} = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

4.1. kérdés. A grafikon alapján világosan látszik, hogy a pontokra illeszthető egyenes meredeksége egy értékes jegy pontossággal $\alpha = 4$.



¹ Az elméleti feladatok szövegét múlt havi számunkban közzeltük.

² KöMaL, 2007/7., 425. oldal.

4.2. kérdés. Az előző részfeladat eredménye alapján:

$$L_i = L_{\text{Nap}} \left(\frac{M_i}{M_{\text{Nap}}} \right)^4.$$

Így $L_1 = 3 \cdot 10^{28}$ W és $L_2 = 4 \cdot 10^{27}$ W.

4.3. kérdés. A rendszer teljes kisugárzott teljesítménye egy d sugarú gömb mentén oszlik el egyenletesen, és hozza létre az észlelhető I_0 intenzitást:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}, \quad \text{ebből} \quad d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = 10^{18} \text{ m} = 100 \text{ fényév}.$$

4.4. kérdés. $\theta \cong \text{tg } \theta = \frac{r}{d} = 10^{-8}$ rad.

4.5. kérdés. Egy tipikus optikai hullámhossz: $\lambda_0 \cong 500$ nm. Mivel egy távcső szögfelbontása kb. λ_0/D , innen $D \gtrsim \frac{d\lambda_0}{r} \approx 50$ m.

2. feladat. Légzsák

1.1. kérdés. A kondenzátorlemezre felírva a Gauss-törvényt megkapjuk a térerősséget: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$. A térerősséget a két kondenzátorlemezen lévő töltés együttesen hozza létre, így mindkét lemez hozzájárulása $\frac{1}{2}E$. Ennek alapján a lemezek közt ható erő:

$$F_e = \frac{1}{2}EQ = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

1.2. kérdés. A Hooke-törvény alapján a rugóerő: $F_m = -kx$. Az előző kérdésben levezettük a lemezek közt ható elektromos erőt: $F_e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$. A rendszer egyensúlyában $F_m + F_e = 0$, amiből $x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Ak}$.

1.3. kérdés. A térerősség a kondenzátorlemezek között homogén, így a lemezek közötti V potenciálkülönbség egyszerűen számolható: $V = E(d - x)$. Behelyettesítve az előző részekben kapott eredményeket, kapjuk:

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd} \right).$$

1.4. kérdés. A C kapacitás a töltés és a potenciálkülönbség hányadosa: $C = \frac{Q}{V}$. Felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt:

$$\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd} \right)^{-1}.$$

1.5. kérdés. A rugóban tárolt mechanikai energia $U_m = \frac{1}{2}kx^2$, a kondenzátorban tárolt elektromos energia pedig $U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$. Így a rendszerben tárolt teljes energia

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 Akd} \right).$$

2.1. kérdés. Adott x érték esetén az egyes kondenzátorok töltése egyszerűen számolható:

$$Q_1 = VC_1 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d - x}, \quad Q_2 = VC_2 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d + x}.$$

2.2. kérdés. Ne felejtjük el, hogy két kondenzátorunk van. Felhasználva az 1.1. kérdésre kapott választ, az egyes kondenzátorokban fellépő erő

$$F_1 = \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 A}, \quad F_2 = \frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Mivel a két erő ellentétes irányú, az eredő erő

$$F_e = F_1 - F_2 = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right).$$

2.3. kérdés. Elhanyagolva az x^2 -rendű tagokat, kapjuk:

$$F_e = \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x.$$

2.4. kérdés. Két, k rugóállandójú rugó van sorba kapcsolva, így az eredő mechanikai erő $F_m = -2kx$. Az elektromos és a mechanikai erő ellentétes irányú, így, felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt, az eredő erő

$$F = F_m + F_e = -2 \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x, \quad \text{ebből pedig} \quad k_{\text{eff}} = 2 \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right).$$

2.5. kérdés. Felhasználva Newton II. törvényét és az előző eredményt

$$a = -\frac{2}{m} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

3.1. kérdés. Írjuk fel az áramkörre a Kirchhoff-törvényeket!

$$\frac{Q_K}{C_K} + V - \frac{Q_2}{C_2} = 0, \quad -\frac{Q_K}{C_K} + V - \frac{Q_1}{C_1} = 0, \quad Q_2 - Q_1 + Q_K = 0.$$

Felhasználva, hogy $V_K = \frac{Q_K}{C_K}$, kapjuk:

$$V_K = V \frac{\frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2 - x^2}}{C_K + \frac{2\varepsilon_0 Ad}{d^2 - x^2}}.$$

3.2. kérdés. Elhanyagolva az x^2 -rendű tagokat, kapjuk:

$$V_K = V \frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2 C_K + 2\varepsilon_0 Ad}.$$

4.1. kérdés. Az elektromos és a mechanikai erő hányadosa

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{k_{\text{eff}} d^3}.$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket

$$\frac{F_e}{F_m} = 7,6 \times 10^{-9}.$$

Az elektromos erők valóban elhanyagolhatók a rugóerők mellett.

4.2. kérdés. Az előzőek szerint elegendő a rugóerőt figyelembe vennünk: $F = 2kx$. Így a gyorsuló (lassuló) rendszerben a mozgó lemez egyensúlyi elmozdulása $x = \frac{ma}{2k}$. A maximális elmozdulás ennek éppen kétszerese, hiszen a mozgó lemez túllendül az egyensúlyi helyzetén:

$$x_{\text{max}} = 2x, \quad x_{\text{max}} = \frac{ma}{k}.$$

4.3. kérdés. Ha a gyorsulás $a = g$, a maximális elmozdulás

$$x_{\text{max}} = \frac{mg}{k}.$$

Továbbá felhasználva a 3.2. kérdésre kapott eredményt:

$$V_K = V \frac{2\varepsilon_0 Ax_{\text{max}}}{d^2 C_K + 2\varepsilon_0 Ad}.$$

Kifejezve C_K -t, és felhasználva, hogy $V_K = 0,15$ V,

$$C_K = \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \left(\frac{V_{x_{\max}}}{V_K d} - 1 \right), \quad C_K = 8,0 \times 10^{-11} \text{ F.}$$

4.4. kérdés. Legyen ℓ a vezető feje és a kormány közötti távolság. Ennek becsült értéke $\ell = 0,4$ m–1 m.

Abban a pillanatban, amikor a lassulás elkezdődik, a vezető fejének az autóhoz viszonyított relatív sebessége nulla. $\Delta v(t=0) = 0$, így

$$\ell = \frac{1}{2} g t_1^2, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}, \quad t_1 = 0,3 \text{ s} - 0,5 \text{ s.}$$

4.5. kérdés. A t_2 idő a harmonikus rezgést végző lemez periódusidejének fele: $t_2 = \frac{T}{2}$, a periódusidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

így $t_2 = 0,019$ s.

Mivel $t_1 > t_2$, a légzsák időben aktiválódik.

Megjegyzés a feladathoz: A gyakorlatban valóban ilyen elven működő gyorsulásmérők aktiválják az autók légzsákját. A valóságos és a feladatban szereplő eszközök között a legfontosabb különbség a méretekben van! A kereskedelemben kapható gyorsulásérzékelők integrált áramkörti technológiával készülnek, a miniatürizált mechanikai alkatrészek és az elektronika ugyanazon az egy-két mm² felületű félvezető csipen kerülnek kialakításra. Az apró és olcsó (néhány dolláros) eszközöket egyre több helyen használják rezgések mérésére és szabályozására; segítségükkel például csökkenthető a mosógépek centrifugálás közben fellépő rezonanciája.

3. feladat. Hawking-sugárzás

1.1. kérdés. Bármilyen alkalmas egyenlet felhasználásával megkaphatjuk a kérdéses mennyiségek dimenzióját. Például a következő kínálkozó lehetőségekkel élhetünk:

I) A Planck-összefüggés alapján:

$$h\nu = E \Rightarrow [h][\nu] = [E] \Rightarrow [h] = [E] \cdot [\nu]^{-1} = ML^2T^{-1}.$$

II) $[c] = LT^{-1}$.

III) A tömegvonzási törvény alapján:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow [G] = [F][r]^2[m]^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

IV) Az ekvipartíció tétel segítségével: $E = \frac{1}{2} k_B \theta$, ahol θ -val jelöltük a hőmérsékletet. Ennek alapján $[k_B] = [E][\theta]^{-1} = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1.2. kérdés. Például a Stefan–Boltzmann-törvény felhasználásával:

$$\frac{\text{Teljesítmény}}{\text{Felület}} = \sigma \cdot \theta^4,$$

amiből $[\sigma]K^4 = [E]L^{-2}T^{-1} \Rightarrow [\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.

1.3. kérdés. Egy számfaktortól eltekintve a Stefan–Boltzmann-állandó a következő alakban írható fel: $\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$, ahol α , β , γ és δ értékét dimenzióanalízissel állapítjuk meg: $[\sigma] = [h]^\alpha [c]^\beta [G]^\gamma [k_B]^\delta$, ahol például $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$. Szép sorjában írjuk be az összes dimenziót:

$$\begin{aligned} MT^{-3}K^{-4} &= (ML^2T^{-1})^\alpha (LT^{-1})^\beta (M^{-1}L^3T^{-2})^\gamma (ML^2T^{-2}K^{-1})^\delta = \\ &= M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}. \end{aligned}$$

A hatványkitevők egybevetéséből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \gamma + \delta &= 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0 \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3 \\ -\delta &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= -3, \\ \beta &= -2, \\ \gamma &= 0, \\ \delta &= 4, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad \sigma = \frac{k_B^4}{c^2 h^3}.$$

2.1. kérdés. Az eseményhorizont A területe a fekete lyuk m tömegétől, a c fénysebességtől és a G egyetemes gravitációs állandótól függ: $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$. A dimenzióanalízis módszere már a könyökünkön jön ki:

$$\begin{aligned} [A] &= [G]^\alpha [c]^\beta [m]^\gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow L^2 &= (M^{-1} L^3 T^{-2})^\alpha (L T^{-1})^\beta (M)^\gamma = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Most csak három ismeretlent tartalmaz az egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha + \gamma &= 0 \\ 3\alpha + \beta &= 2 \\ -2\alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2, \\ \beta &= -4, \\ \gamma &= 2, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad A = \frac{m^2 G^2}{c^4}.$$

2.2. kérdés. Az entrópia $dS = dQ/\theta$ termodinamikai definíciója (dQ a hőközlés mértéke, θ pedig a rendszer abszolút hőmérséklete) alapján az entrópia dimenziója: $[S] = [E][\theta]^{-1} = M L^2 T^{-2} K^{-1}$.

2.3. kérdés. Az η állandó dimenzióját Bekenstein nyomán ($\eta = S/A$), valamint az alapvető fizikai állandók (h , c , G és k_B) függvényeként így fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} [\eta] &= [S][A]^{-1} = M T^{-2} K^{-1}, \\ [\eta] &= [G]^\alpha [h]^\beta [c]^\gamma [k_B]^\delta = M^{-\alpha+\beta+\delta} L^{3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta} T^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta} K^{-\delta}. \end{aligned}$$

A hatványkitevők összevetése megint négyismeretlenes egyenletrendszerrel örvendeztet meg minket, ami azonban csak három ismeretlennel bír:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha + \beta + \delta &= 1 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma + 2\delta &= 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma - 2\delta &= -2 \\ \delta &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= -1, \\ \beta &= -1, \\ \gamma &= 3, \\ \delta &= 1, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad \eta = \frac{c^3 k_B}{G h}.$$

A továbbiakban már nem kell használnunk a dimenzióanalízis módszerét, ami nagy öröm, mert mostanra még a legelszántabbak is valószínűleg megcsömrölköttek tőle.

3.1. kérdés. A termodinamika első főtétele alapján $dE = dQ + dW$, ahol közelítésként feltesszük, hogy $dW = 0$. Az entrópia $dS = dQ/\theta$ definícióját felhasználva ezt kapjuk: $dE = \theta_H dS + 0$.

Használjuk fel, hogy $S = \frac{G k_B}{c h} m^2$, $E = m c^2$. Így a fekete lyuk Hawking-hőmérsékletére a következő összefüggést kapjuk:

$$\theta_H = \frac{dE}{dS} = \left(\frac{dS}{dE} \right)^{-1} = c^2 \left(\frac{dS}{dm} \right)^{-1}.$$

Elvégezve a deriválást, megkapjuk a végeredményt:

$$\theta_H = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{c^3 h}{G k_B} \cdot \frac{1}{m}.$$

Megjegyezzük, hogy a végeredményben található $1/2$ -es faktornak nincs jelentősége, elhagyható, csak a deriválás miatt maradt az összefüggésben.

3.2. kérdés. A Stefan–Boltzmann-törvény az egységnyi felületre jutó kisugárzott teljesítményt adja meg. Figyelembe véve az $E = m c^2$ összefüggést is, a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\sigma \theta_H^4 A \\ \sigma &= \frac{k_B^4}{c^2 h^3} \\ A &= \frac{m^2 G^2}{c^4} \\ E &= m c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 \frac{dm}{dt} = -\frac{k_B^4}{c^2 h^3} \left(\frac{c^3 h}{2 G k_B} \cdot \frac{1}{m} \right)^4 \frac{m^2 G^2}{c^4}.$$

Az egyszerűsítések elvégzése után:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16} \frac{c^4 h}{G^2} \cdot \frac{1}{m^2}.$$

3.3. kérdés. A változók szétválasztásával a következő integrált végezhetjük el:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16} \frac{c^4 h}{G^2} \frac{1}{m^2} \Rightarrow \int m^2 dm = -\int \frac{c^4 h}{16 G^2} dt \Rightarrow m^3(t) - m^3(0) = -\frac{3 c^4 h}{16 G^2} t.$$

Amikor a fekete lyuk $t = t^*$ -kor teljesen elpárolog:

$$m(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{16G^2}{3c^4 h} m^3.$$

3.4. kérdés. A fekete lyuk C_V hőkapacitása megmutatja, hogy a θ hőmérséklet egységnyi megváltozásához mekkora E energiaváltozás tartozik:

$$\left. \begin{aligned} C_V &= \frac{dE}{d\theta} \\ E &= mc^2 \\ \theta &= \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_V = -\frac{2Gk_B}{ch} m^2.$$

4.1. kérdés. Újra a Stefan–Boltzmann-törvény adja meg a fekete lyuk egységnyi felületének energiaveszteségi ütemét. A fekete lyuk kozmikus háttérsugárzás miatti energia nyereségét egy hasonló összefüggés írja le. Ezt úgy láthatjuk be, hogy termikus egyensúlyban a teljes energia változásnak el kell tűnnie. Ebből az következik, hogy az energia nyereség ütemét a Stefan–Boltzmann-törvénnyel teljesen megegyező formula jellemzi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\sigma\theta^4 A + \sigma\theta_B^4 A \\ E &= mc^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^2} + \frac{G^2}{c^8 h^3} (k_B \theta_B)^4 m^2.$$

4.2. kérdés. Vegyük a $\frac{dm}{dt} = 0$ esetet:

$$-\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^{*2}} + \frac{G^2}{c^8 h^3} (k_B \theta_B)^4 m^{*2} = 0, \quad \text{amiből} \quad m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{\theta_B}.$$

4.3. kérdés.

$$\theta_B = \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{m^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}} \right).$$

4.4. kérdés. Használjuk fel a 4.2. és a 3.1. részkérdésekre adott válaszeredményeket:

$$m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{\theta_B} \quad \text{és} \quad \theta^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{m^*} = \theta_B.$$

Úgy is érvelhetünk, hogy m^* felel meg a termikus egyensúlynak. Így $m = m^*$ esetén a fekete lyuk hőmérséklete θ_B . Az is elfogadható megoldás, hogy termikus egyensúly esetén

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma(\theta^{*4} - \theta_B^4)A = 0, \quad \text{amiből} \quad \theta^* = \theta_B.$$

4.5. kérdés. A 4.3. eredmény alapján megmutatható, hogy az egyensúly instabil:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}} \right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m &> m^* && \Rightarrow \frac{dm}{dt} > 0. \\ m &< m^* && \Rightarrow \frac{dm}{dt} < 0. \end{aligned}$$

Kónya Gábor (aki maximális pontszámra írta meg az elméleti feladatok megoldását) a következő kiegészítéssel látta el dolgozatát a diákolimpián. Munkáját, amelyben dimenzióanalízis nélkül, alapvető fizikai megfontolások segítségével vezeti le a Hawking-probléma kevésbé ismert formuláit, változtatás nélkül közöljük.

$A(m)$, $\theta_H(m)$, $S(m)$ képletek egy alternatív levezetése:

Vegyük egy p impulzusú fotont a fekete lyukban, a középponttól r távolságra. A foton teljes energiája:

$$pc - G \frac{p}{c} \frac{m}{r} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad r \leq \frac{Gm}{c^2}.$$

Az eseményhorizont sugara és felülete:

$$R = \frac{Gm}{c^2} \quad \text{és} \quad A = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{G^2 m^2}{c^4} \approx \frac{G^2 m^2}{c^4}.$$

Az R sugarú gömbbe zárt foton impulzusát a határozatlansági relációból $p = \frac{\hbar}{R}$ -nek becsülhetjük. Egy foton mozgási energiája:

$$pc = \frac{\hbar c}{R} = \frac{\hbar c^3}{Gm} \approx \frac{\hbar c^3}{Gm}.$$

A rendszer hőmérséklete: $\theta_H \approx \frac{pc}{k} = \frac{\hbar c^3}{Gkm}$ (ekvipartíció-tétel). A rendszer entrópiája:

$$S = \int \frac{d(mc^2)}{\theta_H} = \frac{Gk}{\hbar c} \cdot \frac{1}{2} m^2 \approx \frac{Gk}{\hbar c} \cdot m^2.$$

$$\eta = \frac{S}{A} = \frac{kc^3}{\hbar G} = \text{állandó}.$$

Az eredmények megegyeznek a dimenzióanalízissel kaphatókkal, de az $S \sim A$ összefüggést bizonyítottuk, nem feltételeztük.

Kísérleti feladat

A kísérleti feladatban egy vasoxid (Fe_2O_3) nanorészecske-láncokat tartalmazó vékonyréteg-félvezető tiltottsáv-szélességét és vastagságát kellett meghatározni optikai módszerrel.

A tiltottsáv-szélesség a félvezetők és a szigetelők esetében a vegyérték sáv teteje és a vezetési sáv alja közti energia-különbség. A vegyérték sáv teljesen be van töltve elektronokkal, a vezetési sáv pedig üres – azonban a vegyérték sávból elektronok juthatnak a vezetési sávba, ha elegendő (legalább a tiltottsáv-szélességgel megegyező nagyságú) energiát kapnak.

A tiltottsáv-szélesség megméréséhez az átlátszó vékonyréteg fényelnyelő-képességét (abszorpcióját) kellett vizsgálniuk a versenyzőknek a mintán áthaladó fény spektrumának segítségével. Kicsit leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy az abszorpciós spektrumon hirtelen ugrás (növekedés) figyelhető meg, amikor a foton energiája eléri a tiltottsáv-szélességet.

Kísérletileg bebizonyították, hogy a tiltottsáv-szélességnél kicsit nagyobb fotonenergiák esetében a következő összefüggés teljesül:

$$(1) \quad \alpha h\nu = A(h\nu - E_g)^\eta,$$

ahol α a vékonyréteg abszorpciós együtthatója, A egy anyagfüggő (a vékonyréteg anyagától függő) állandó, η pedig a vékonyréteg anyagától és szerkezetétől függő abszorpciós mechanizmusból meghatározható állandó. (A vizsgált vékonyrétegre $A = 0,071 \text{ eV}^{1/2}/\text{nm}$ és $\eta = 1/2$.) Az áteresztőképességet α értékével a jól ismert abszorpciós összefüggés kapcsolja össze:

$$T_{\text{film}} = e^{-\alpha t},$$

ahol t a vékonyréteg vastagsága.

A mérési összeállításban (lásd *ábra*) egy 5' pontossággal beállítható goniométerre (szögmérésre alkalmas eszköz egy rögzített és egy forgó karral) szerelt optikai ráccsal lehetett felbontani egy halogénlámpa fehér fényét. A mintán és a referenciának használt üveglemezen áthaladó fény erősségét fotoellenállás segítségével lehetett mérni. (A fotoellenállás elektromos ellenállása csökken, ha a rá eső fény intenzitása növekszik.)



A mérés elején a versenyzőknek hosszadalmas, bonyolult eljárással kellett beállítaniuk az egyes optikai elemeket, és meghatározniuk a spektrális felbontás pontosságát. Ezt követte a mérés elvégzése (a mintán, illetve az üres üveglemezen átmenő fény intenzitásának mérése a hullámhossz függvényében) és az adatok kiértékelése.

A kiértékeléshez az $x = h\nu$ és $y = (\alpha h\nu)^2$ értékpárokat kellett ábrázolni egy koordináta-rendszerben, és a pontokra az (1) egyenletet kielégítő tartományban egyenest kellett illeszteni (lásd *grafikon*). Az (1) egyenletet t -vel megszorozva és négyzetre emelve kapjuk:

$$(\alpha h\nu)^2 = (At)^2(h\nu - E_g),$$

amit összevetve x és y képletével:

$$y = (At)^2(x - E_g).$$

Ennek alapján az illesztett egyenes paramétereiből már könnyen meghatározható az E_g tiltotsáv-szélesség és (A ismeretében) a vékonyréteg t vastagsága. A vékonyréteg előállítása nehezen reprodukálható, így az egyes mintákon E_g értéke 2 eV és 2,2 eV között, t értéke 70 nm és 200 nm között változott. (A rendezők a versenyre készített mind a 616 mintát végigmérték!)

