

I. rész

1. Határozzuk meg azokat az a , b , c egész számokat, melyekre teljesül a következő két tulajdonság:

i) A három szám összege fele a szorzatuknak;

ii) Az egyik szám egyenlő a másik kettő összegével.

(11 pont)

2. Két, egy síkban haladó repülőgép repülési pályája két, egymásra merőleges egyenes. Egy adott pillanatban pályájuk képzeletbeli metszéspontjától az egyik repülőgép 2 km, a másik 2,5 km távolságban van. Az előbbi gép sebessége 270 km/h, a másiké 180 km/h. A gépek vészjelzője figyelmezteti a pilótákat, ha 1 km-nél jobban megközelítik egymást.

a) Határozzuk meg, hány másodperc múlva lesz a két repülőgép távolsága minimális.

(9 pont)

b) Megszólal-e a vészjelző a repülőgépeken?

(3 pont)

3. Egy nem állandó számtani sorozat első három eleme közül a másodikat és a harmadikat felcserélve egy mértani sorozat első három elemét kapjuk. A számtani sorozat első eleme egyenlő a második és a harmadik elem szorzatának ellentettjével. Határozzuk meg a számtani sorozatot.

(14 pont)

4. Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze

a) egy ötfős csoportot;

(2 pont)

b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot;

(4 pont)

c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie;

(4 pont)

d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki?

(4 pont)

II. rész

5. Egy egyenes körkúp alakú edény alapkörének sugara 12 cm, magassága 18 cm. Az edényt csúcsára állítjuk, és 1 liter vizet töltünk bele.

a) Milyen magasan áll benne a víz?

(8 pont)

b) Mennyi festékre lenne szükség az edény külső falának befestéséhez, ha 1 liter festék 8 m^2 felületre elegendő?
(8 pont)

6. A hagyományos ötöslottón egy szelvényvel játszva a nyerés (legalább két találat) esélye kb. 2,33%. A nagy nyereség reményében 100 véletlenszerűen kitöltött szelvényt küldünk játékba.

a) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy nyertes szelvényünk?

(5 pont)

b) Mekkora valószínűséggel lesz pontosan három nyertes szelvényünk?

(5 pont)

c) Hány szelvényt kellene feladni egy adott héten, hogy legalább 99% valószínűséggel legyen köztük nyertes szelvény?
(6 pont)

7. Egy számunkra megközelíthetetlen hegy tetején álló adótorony magasságát szeretnénk meghatározni. A hegy lábával azonos magasságban elterülő síkságon felvesszük az egymástól 80 méterre lévő A és B pontokat úgy, hogy a B pontból az A pont és a torony (ebben a sorrendben) egy irányban látszódjanak. Az A pontból a torony alját $41^\circ 30'$ -es, a tetejét 49° -os, a B pontból a torony alját $34^\circ 15'$ -es szög alatt látjuk.

a) Milyen magas a hegy?

(7 pont)

b) Milyen magas a torony?

(5 pont)

c) Mekkora szög alatt látszik a B pontból a torony teteje?

(4 pont)

8. Adott a koordináta-rendszerben az

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

egyenletű k_1 kör.

a) Határozzuk meg a k_1 körbe írt derékszögű háromszög harmadik csúcsának koordinátáit, ha két ismert csúcsának koordinátái $(-2; 4)$ és $(5; 5)$.

(6 pont)

b) Keressünk az x tengelyen olyan pontot, melyből a k_1 körhöz és az

$$(x - 12)^2 + y^2 = 4$$

egyenletű k_2 körhöz húzott érintők hosszúsága egyenlő.

(10 pont)

9. a) Határozzuk meg az $f(x) = px^2 + 2x + q$ függvény grafikonja, valamint az $x = 4$ és az $x = 6$ egyenesek által közrezárt síkidom területét, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^2 f(x) dx = -2 \quad \text{és} \quad \int_2^4 f(x) dx = 54. \quad (9 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg azon k értékeket, melyekre

$$\int_0^k f(x) dx = 0.$$

(7 pont)