

I. rész

1. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $(5; 5)$ pont, továbbá az $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ egyenletű kört az $(1; 3)$ pontban érinti. (11 pont)

Megoldás. Az adott kör középpontjának koordinátái: $(-2; 4)$. A keresett kör középpontja rajta van az $(1; 3)$ és a $(-2; 4)$ pontokra illeszkedő $x + 3y = 10$ egyenletű egyenesen. A keresett kör középpontja rajta van az $(1; 3)$ és az $(5; 5)$ pontok által meghatározott húr felezőmerőlegesén is, a $2x + y = 10$ egyenletű egyenesen. A két egyenes metszéspontja, vagyis a kör középpontjának koordinátái: $(4; 2)$.

A kör sugarának hosszát az $(1; 3)$ és a $(4; 2)$ pontok távolságaként számíthatjuk ki: $\sqrt{10}$.

A keresett kör egyenlete:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10.$$

2. A Sajó sóder nevű cukorkát ötvenesével csomagolják. A minőségellenőrzéskor megállapították, hogy csak 0,9 valószínűséggel találunk pontosan 50 darabot a csomagokban.

a) Mekkora az esélye annak, hogy hat csomag cukorkát vásárolva mindegyik csomagban 50 darab cukorka lesz?

b) Mekkora az esélye, hogy a hat csomag között legalább két olyan csomag van, amelyben nem 50 darab cukorkát találunk? (12 pont)

Megoldás. a) Feltételezzük, hogy a vásárlásnál egymástól függetlenül, véletlenszerűen választottuk ki a csomagokat. A keresett valószínűség: $0,9^6 \approx 0,531$.

Vagyis 0,531 az esélye annak, hogy hat csomag cukorkát vásárolva mindegyik csomagban 50 darab cukorka lesz.

b) A keresett valószínűség:

$$1 - (0,9^6 + 6 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1) \approx 0,114.$$

Vagyis 0,114 az esélye, hogy a hat csomag között legalább két olyan csomag van, amelyben nem 50 darab cukorkát találunk.

3. Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt, ha $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. (14 pont)

Megoldás. Megoldjuk a $3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}$ egyenletet. Ez $3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0$ alakra rendezhető, amiből $\operatorname{tg} x$ lehetséges értékei: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ vagy $-\sqrt{3}$. Vagyis

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + k_2\pi, \quad \text{ahol } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Az $|x| \leq 2$ feltétel szerint $-2 \leq x \leq 2$.

Vagyis

$$A \cap B = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} \right\}.$$

4. Három különböző körkúpról tudjuk, hogy mind az alapkörök sugara, mind a kúpok magassága egy-egy azonos differenciájú számtani sorozat három egymást követő eleme. Mutassuk meg, hogy a kúpok térfogata nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme. (14 pont)

Megoldás. Az alapkörök sugarai legyenek: $r - d$, r , $r + d$, a magasságok: $m - d$, m , $m + d$. Ekkor a térfogatok: $V_1 = \frac{(r - d)^2 \pi (m - d)}{3}$, $V_2 = \frac{r^2 \pi m}{3}$, $V_3 = \frac{(r + d)^2 \pi (m + d)}{3}$. Ha V_1 , V_2 , V_3 egy számtani sorozat három egymást követő eleme, akkor a $V_3 - V_2 = V_2 - V_1$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Számoljuk ki ezeket a különbségeket:

$$V_3 - V_2 = \frac{(r + d)^2 \pi (m + d)}{3} - \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{\pi}{3} [(r + d)^2 (m + d) - r^2 m] =$$

$$= \frac{\pi}{3} (d^3 + r^2 d + 2rd^2 + 2rmd + md^2),$$

$$V_2 - V_1 = \frac{r^2 \pi m}{3} - \frac{(r - d)^2 \pi (m - d)}{3} = \frac{\pi}{3} [r^2 m - (r - d)^2 (m - d)] =$$

$$= \frac{\pi}{3} (d^3 + r^2 d - 2rd^2 + 2rmd - md^2).$$

Látható, hogy a két különbség csak $d = 0$ esetén lehetne egyenlő, de a kúpok különbözőek, ezért $d \neq 0$. A kúpok térfogata nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme.

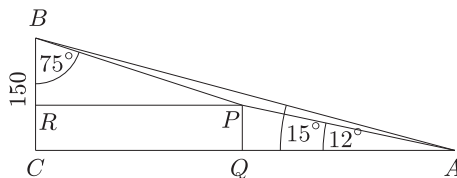
II. rész

5. Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 150 egység, egyik hegyesszöge 15° . A háromszög egy belső P pontját kössük össze az átfogó két végpontjával. Ezek a szakaszok és a két befogó olyan konkáv négyszög oldalai, melynek hegyesszögei 12° és 72° .

- Az átfogó melyik végpontjához van közelebb a P pont?
- Milyen távol van a hosszabbik befogótól a P pont?
- Mekkora a szóban forgó konkáv négyszög területe?

(16 pont)

Megoldás. Készítsünk egy vázlatrajzot a feladat szövege alapján.



a)

$$\begin{aligned} \angle PAB &= \angle CAB - \angle CAP = \\ &= 15^\circ - 12^\circ = 3^\circ, \\ \angle ABP &= \angle ABC - \angle PBR = \\ &= 75^\circ - 72^\circ = 3^\circ \end{aligned}$$

(így $\angle APB = 174^\circ$).

Mivel az ABP háromszögben két szög egyenlő, így $AP = BP$, vagyis a felvett belső pont az átfogó két végpontjától egyenlő távolságra van.

b) Az ABC derékszögű háromszögben $AB = \frac{150}{\sin 15^\circ}$. Az APB háromszögben a szinusztételt felírva: $\frac{AP}{AB} = \frac{\sin 3^\circ}{\sin 174^\circ}$, amiből

$$AP = \frac{150 \cdot \sin 3^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 174^\circ} \approx 290,2.$$

Az APQ derékszögű háromszögben $\sin 12^\circ = \frac{PQ}{PA} = \frac{PQ}{290,2}$, amiből kapjuk a keresett távolságot: $PQ \approx 60,3$.

c) Az ABC háromszög területéből vonjuk le az APB háromszög területét.

Mivel $\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{AC}{150}$, így $AC \approx 559,8$.

$$t_{ABC} = \frac{150 \cdot 559,8}{2} = 41\,985, \quad t_{APB} = \frac{290,2 \cdot 290,2 \cdot \sin 174^\circ}{2} \approx 4401,5.$$

A négyszög területe: $t = 41\,985 - 4401,5 = 37\,583,5$.

6. Tekintsük az $y = (p-1)x^2 + 2px + 4$ egyenletű parabolákat, ahol p 1-től különböző tetszőleges valós szám.

- Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre a parabolának nincs közös pontja az x tengellyel?
- Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek a fenti parabolasereg valamennyi elemére illeszkednek.
- Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a $(p-1)x^2 + 2px + 4 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege 5 legyen.

(16 pont)

Megoldás. a) Olyan p értéket keresünk, amelyre a $(p-1)x^2 + 2px + 4 = 0$ másodfokú egyenletnek nincs esetén nemnegatív, vagyis a parabolának mindig van közös pontja az x tengellyel.

b) Rendezzük a parabolasereg egyenletét a p hatványai szerint:

$$y = (x^2 + 2x)p - (x^2 - 4).$$

Látható, hogy ha a p együtthatója 0, akkor y értéke nem függ a p -tól. Ez akkor teljesül, ha $x = 0$ vagy $x = -2$. Így minden adott típusú parabola áthalad a $(0; 4)$, illetve a $(-2; 0)$ pontokon. További ilyen pont pedig nincs, mert három különböző pont egyértelműen határoz meg egy legfeljebb másodfokú függvényt.

c)

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-2p}{p-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{p-1} = \frac{4p^2 - 8p + 8}{(p-1)^2} = 5,$$

amiből a $p^2 - 2p - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei lesznek a keresett értékek: $p_1 = -1, p_2 = 3$.

7. Melyek azok az a, b egész számok, amelyekre $\lg(3a + 2b) = \lg a + \lg b$? (16 pont)

Megoldás. A logaritmus definíciója miatt: $a > 0, b > 0$.

A logaritmus azonosságai szerint: $\lg(3a + 2b) = \lg ab$, azaz $3a + 2b = ab$. Ezt írjuk a következő alakban: $6 = ab - 3a - 2b + 6$. Bontsuk szorzattá a jobb oldalon álló kifejezést: $6 = (a - 2)(b - 3)$. A következő értékek jöhetnek szóba:

$a - 2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$b - 3$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
a	-4	-1	0	1	3	4	5	8
b	2	1	0	-3	9	6	5	4

A feltételeknek a (3; 9), (4; 6), (5; 5), (8; 4) számpárok felelnek meg.

8. Az $f(x) = \sqrt{x}$ hozzárendeléssel megadott, a $[0; a]$ intervallumon értelmezett függvény görbét megforgatjuk az x tengely körül.

a) Határozzuk meg azt a legnagyobb a egész számot, amelyre a keletkezett forgástest térfogata nem haladja meg az 1000 térfogategységet.

b) Írjuk fel az érintő egyenletét az f grafikonjának 4 abszcisszájú pontjában. (16 pont)

Megoldás. a) Számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát. Tudjuk, hogy az nem haladja meg az 1000 térfogategységet. A kérdés úgy értelmes, ha $a > 0$.

$$V = \pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^a x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2 \pi}{2} \leq 1000.$$

Innen $a \leq 25$, tehát a keresett legnagyobb egész szám a 25.

b) Határozzuk meg a deriváltat:

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

Az érintő meredeksége:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Az $x = 4$ abszcisszájú pont koordinátái: (4; 2).

Az érintő egyenlete:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4).$$

9. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a $4 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$ összeg minimális. Mennyi ez a legkisebb érték? (16 pont)

Megoldás. Hegyesszögek esetén a $4 \cos^2 x$ és a $\frac{1}{\cos^2 x}$ is értelmezve van és pozitív.

Ismerjük két pozitív szám esetén a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Egyenlőség $a = b$ esetén van.

Alkalmazzuk ezt $a = 4 \cos^2 x$ és $b = \frac{1}{\cos^2 x}$ értékekre:

$$\sqrt{4 \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \leq \frac{4 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}}{2},$$

amit így írhatunk:

$$4 = 2 \cdot \sqrt{4 \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \leq 4 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

A kifejezés értéke akkor lehet 4, ha $4 \cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Ha x hegyesszög, akkor ez ekvivalens a $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ feltétellel, ami most pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{\pi}{4}$.