

I. rész

1. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $(5; 5)$ pont, továbbá az $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ egyenletű kört az $(1; 3)$ pontban érinti. (11 pont)

2. A *Sajó sóder* nevű cukorkát ötvenesével csomagolják. A minőségellenőrzéskor megállapították, hogy csak 0,9 valószínűséggel találunk pontosan 50 darabot a csomagokban.

a) Mekkora az esélye annak, hogy hat csomag cukorkát vásárolva mindegyik csomagban 50 darab cukorka lesz?

b) Mekkora az esélye, hogy a hat csomag között legalább két olyan csomag van, amelyben nem 50 darab cukorkát találunk? (12 pont)

3. Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt, ha $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. (14 pont)

4. Három különböző körkúpról tudjuk, hogy mind az alapkörük sugara, mind a kúpok magassága egy-egy azonos differenciájú számtani sorozat három egymást követő eleme. Mutassuk meg, hogy a kúpok térfogata nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme. (14 pont)

II. rész

5. Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 150 egység, egyik hegyesszöge 15° . A háromszög egy belső P pontját kössük össze az átfogó két végpontjával. Ezek a szakaszok és a két befogó olyan konkáv négyszög oldalai, melynek hegyesszögei 12° és 72° .

a) Az átfogó melyik végpontjához van közelebb a P pont?

b) Milyen távol van a hosszabbik befogótól a P pont?

c) Mekkora a szóban forgó konkáv négyszög területe? (16 pont)

6. Tekintsük az $y = (p - 1)x^2 + 2px + 4$ egyenletű parabolákat, ahol p 1-től különböző tetszőleges valós szám.

a) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre a parabolának nincs közös pontja az x tengellyel?

b) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek a fenti parabolareg valamennyi elemére illeszkednek.

c) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a $(p - 1)x^2 + 2px + 4 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege 5 legyen. (16 pont)

7. Melyek azok az a , b egész számok, amelyekre $\lg(3a + 2b) = \lg a + \lg b$? (16 pont)

8. Az $f(x) = \sqrt{x}$ hozzárendeléssel megadott, a $[0; a]$ intervallumon értelmezett függvény görbét megforgatjuk az x tengely körül.

a) Határozzuk meg azt a legnagyobb a egész számot, amelyre a keletkezett forgástest térfogata nem haladja meg az 1000 térfogategységet.

b) Írjuk fel az érintő egyenletét az f grafikonjának 4 abszcisszájú pontjában. (16 pont)

9. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a $4 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$ összeg minimális. Mennyi ez a legkisebb érték? (16 pont)