

Megjegyzések a 2005. évi Eötvös-verseny 2. és 3. feladatának megoldásához ¹

A 2. feladat a Huygens–Fresnel-elv és némi (vektor)algebrai ismeret felhasználásával is megoldható. Tekintsük az ernyő valamely $\mathbf{R} = (X, Y, S)$ vektorral jellemzett pontját ($S = 3$ m a rács és az ernyő távolsága), valamint a lézerrénnyel megvilágított lap $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$ és $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ vektorokkal megadott rácsponthoz. Annak feltétele, hogy az $\mathbf{r}_0$ és az $\mathbf{r}$ rácsponthoz kiinduló fény az $\mathbf{R}$ pontban erősítse egymást:

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0| - |\mathbf{R} - \mathbf{r}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + S^2} - \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + S^2} = n\lambda,$$

ahol n egész szám. Kihasználva, hogy $S \gg X, Y \gg x, y$, a fenti két négyzetgyök különbsége így is írható:

$$\begin{aligned} & \sqrt{X^2 + Y^2 + S^2} - \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + S^2} = \\ &= S \left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{S^2} \right)^{1/2} - S \left(1 + \frac{(X - x)^2 + (Y - y)^2}{S^2} \right)^{1/2} \approx \frac{xX + yY}{S} = n\lambda. \end{aligned}$$

Legyen például $x = d$ és $y = 0$, vagyis tekintsük a rács önkényesen kiválasztott origójától jobbra elhelyezkedő, $\mathbf{a} = (d, 0, 0)$ vektorral megadott lyukból induló fényt. Az erősítés feltétele a fenti közelítésben:

$$d \cdot X = n_1 \lambda S,$$

ahol n_1 egész szám. Hasonlóan felírhatjuk egy másik, a háromszögrács origójától „jobbra fölfelé” elhelyezkedő, $\mathbf{b} = \left(\frac{d}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}d, 0 \right)$ vektorral megadott lyukra az erősítő interferencia feltételét:

$$\frac{d}{2} \cdot X + \frac{\sqrt{3}}{2}d \cdot Y = n_2 \lambda S,$$

ahol n_2 ugyancsak egész szám.

Ha a fenti két feltétel teljesül, akkor nem csak a vizsgált két lyukpárra, hanem pl. a $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$, sőt, a háromszögrács tetszőleges $N_1\mathbf{a} + N_2\mathbf{b}$ vektorral megadható pontjából induló elemi hullámra is igaz lesz erősítés feltétele, amennyiben N_1 és N_2 egészek.

A fenti egyenletekből álló rendszer megoldása:

$$X = n_1 \cdot \frac{S\lambda}{d}, \quad Y = -n_1 \cdot \frac{S\lambda}{\sqrt{3}d} + n_2 \cdot \frac{2S\lambda}{\sqrt{3}d},$$

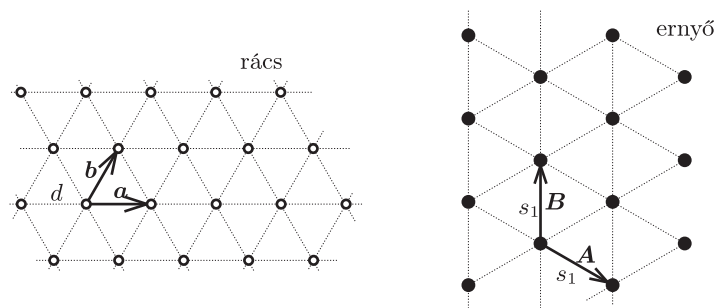
amit vektor alakban így is felírhatunk:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = n_1 \cdot \frac{S\lambda}{d} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + n_2 \cdot \frac{S\lambda}{d} \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = n_1 \cdot \mathbf{A} + n_2 \cdot \mathbf{B}.$$

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ vektorok egymással 120° -os szöget zárnak be, nagyságuk ugyanakkora:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = s_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} S \frac{\lambda}{d},$$

a belőlük egész együtthatós „lineáris kombinációval” adódó pontrács tehát egy szabályos háromszögrács (1. ábra).



1. ábra

¹ A feladatok szövegét és a hivatalos megoldást lásd *Radnai Gyula* cikkében lapunk 168. oldalán.

2. A feladat egy egyszerű geometriai módszerrel is megoldható. Tekintsünk először egy D rácsállandójú négyzet-rácsban elhelyező lyukrendszer elhajlási képét. Ez az eset lényegében az optikai ráccsal egyenértékű: a rácsnégyzet mindkét oldalának megfelelő irányban

$$\alpha_k \approx \sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{D}$$

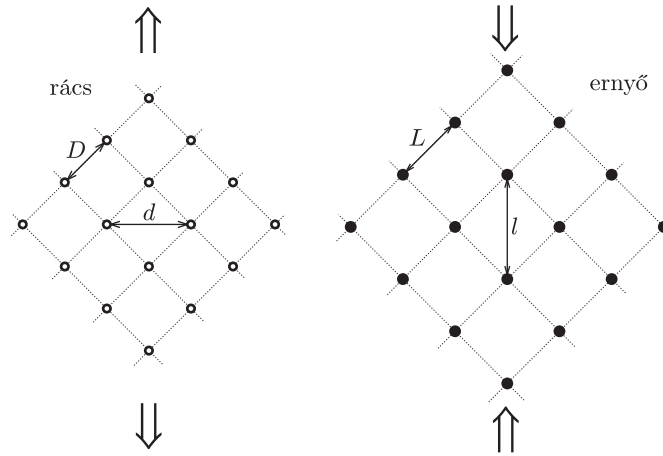
szögben térülhet el a lézerfény, az S távol levő ernyőn tehát egy $s = \frac{S\lambda}{D}$ rácsállandójú, az eredeti lyukelrendezéssel megegyező állású négyzetrács alakul ki.

Nyújtsuk meg képzeletben a lyukrendszert síkjának valamelyik iránya mentén az eredeti méretének c -szeresére. Könnyen végiggondolható, hogy ilyenkor az ernyőn az elhajlási kép is ugyanilyen irányban, de ellentétes módon deformálódik: az eredeti méretének c -ed részére zsugorodik. (Ha valamilyen irányban c -szer ritkábban helyezkednek el a lyukak, akkor a megfelelő útkülönbség c -szer kisebb elhajlási szög mellett alakulhat csak ki, és ez az ernyőn a megfelelő irányban c -szeres zsugorításnak felel meg.)

A 2. ábra bal oldali fele egy olyan négyzetrácsot mutat, amelyben a lyukak legkisebb távolsága (a rácsállandó)

$$D = d/\sqrt{2},$$

és a négyzetek egyik (d hosszúságú) átlója „vízszintesen” helyezkedik el.



2. ábra

Ennek megfelelően az elhajlási kép (az ábra jobb oldali fele) egy olyan – a szokásos elhelyezéshez képest ugyancsak 45° -ban elforgatott – négyzetrács lesz, amelynek rácsállandója $\frac{S\lambda}{D}$, a négyzetek átlója tehát

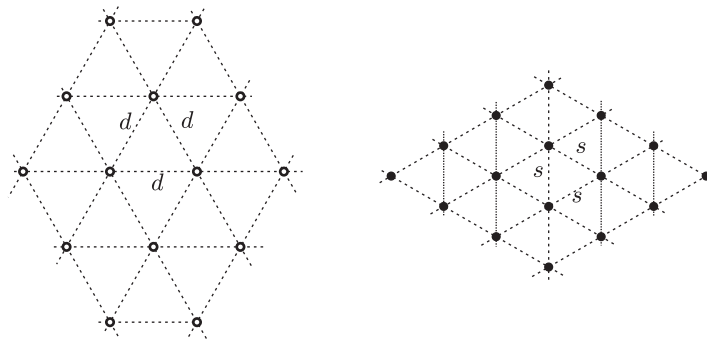
$$l = \sqrt{2}L = \sqrt{2} \frac{S\lambda}{D} = 2 \frac{S\lambda}{d}$$

hosszúságú.

Nyújtsuk meg most a rácsot az ábrán megjelölt „függőleges” irányban $\sqrt{3}$ -szorosára! Ekkor éppen a feladatunkban szereplő d rácsállandójú rácsot kapjuk (3. ábra bal oldala). Az ernyőn az elhajlási kép ugyancsak „függőlegesen” $\sqrt{3}$ -ad részére összezsugorodik (lásd a 3. ábra jobb felét), és így

$$s = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{S\lambda}{d} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

rácsállandójú, az eredeti lyukrácsból képest 90° -kal elforgatott szabályos háromszögrácsá válik.



3. ábra

Az itt alkalmazott transzformációt (amely egyenest egyenesbe visz át, egy-egy egyenes mentén aránytartó, de nem szögtartó) a matematikában *affin-transzformációnak* nevezik.

A 3. feladat energetikai megfontolásokkal is megoldható. Ehhez először belátjuk, hogy a transzformátor tekercsein átfolyó áramok, a tekercseken eső feszültségek és a hálózati feszültség mind azonos fázisban rezegnek. Ez valóban igaz, hiszen a szekunder tekercset egy ohmos ellenállással zártuk, így a rajta átfolyó áram és a feszültsége között nincs fáziskülönbség. A primer és a szekunder feszültség is azonos fázisban változik (hiszen csak így lehet az arányuk minden pillanatban a menetszámoknak megfelelő $1 : 3$), és ugyanez igaz (terhelt transzformátornál) a primer- és a szekunderkörüi áramokra is. A primer körben tehát a tekercs feszültsége és az ohmos ellenálláson eső feszültség között nincs fáziskülönbség, és mivel az összegük minden pillanatban a hálózati feszültség, azzal is azonos fázisban kell legyenek.

Ha I_p -vel jelöljük a primer, I_{sz} -szel pedig a szekunder kör effektív áramerősségét, akkor (a 16. ábra jelöléseit követve) felírhatjuk, hogy a hálózat által leadott teljesítmény megegyezik a két kör ellenállásai által felvett teljesítménnyel:

$$UI_p = I_p^2 \frac{R}{4} + I_{sz}^2 R.$$

Másrészt igaz, hogy az adott menetszám-arányú, jó minőségű, terhelt transzformátornál $U_3 = 3U_2$ és $U_2 \cdot I_p = U_3 \cdot I_{sz}$, azaz

$$I_{sz} = \frac{1}{3} I_p.$$

A fenti egyenletekből a szekunder kör áramára

$$I_{sz} = \frac{12}{13} \frac{U}{R},$$

a primer körben egy-egy izzó áramerősségére pedig

$$\frac{1}{3} I_p = \frac{9}{13} \frac{U}{R}$$

adódik, amelyből a megoldásban közölt eredményekhez és következtetésekhez juthatunk, vagyis valamennyi izzó tűrhetően kell világítson.