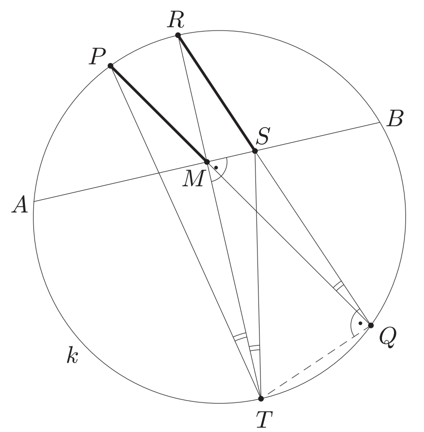
Az idei tanulmányi versenyen a speciális matematika tagozatos osztályok kategóriájában az első forduló utolsó feladata a következő volt:

Legyen AB az O középpontú k körnek egy olyan húrja, amely nem átmérő. Jelölje M az AB szakasz felezőpontját, R pedig az OM félegyenesnek a k-val vett metszéspontját. Vegyünk fel egy tetszőleges P belső pontot a rövidebbik AR íven. A PM félegyenes messe a kört a Q pontban és legyen S az AB és QR húrok metszéspontja. Az RS és PM szakaszok közül melyik a hosszabb?

A feladat igen nehéznek bizonyult, az alábbi megoldások rövidsége ne tévessze meg az Olvasót. A megoldásokat *Molnár András,* a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 12. osztályos tanulója gyűjtötte össze.

I. megoldás (*1. ábra*). A megoldás során a szóban forgó szakaszokat hasonló háromszögek megfelelő oldalaiként azonosítjuk. Legyen most és a továbbiakban az RM átmérő másik végpontja T.



1. ábra

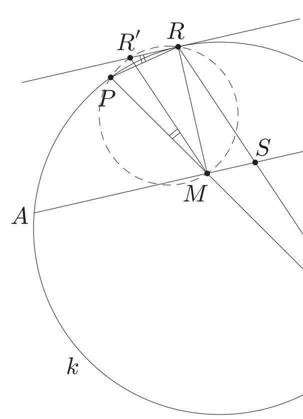
Azt állítjuk, hogy az RTS és a PTM háromszögek hasonlók. Mivel az egymásnak megfelelő oldalak közül PT húr, RT pedig átmérő a k körben, a hasonlóság aránya nagyobb 1-nél. Ebből pedig az következik, hogy $RS > PM$.

$TPQ\sphericalangle = TRQ\sphericalangle$ és $PQR\sphericalangle = PTR\sphericalangle$, hiszen az előbbiek a TQ, az utóbbiak pedig a PR ívhez tartozó kerületi szögek. Vegyük észre még, hogy $MTQS$ húrnégyszög, hiszen RT átmérő, tehát $RQT\sphericalangle = 90^\circ = SMT\sphericalangle$.

Ebből következik, hogy $MTS\sphericalangle = MQS\sphericalangle = PQR\sphericalangle = PTR\sphericalangle$, a PTM és az RTS háromszögek tehát valóban hasonlók.

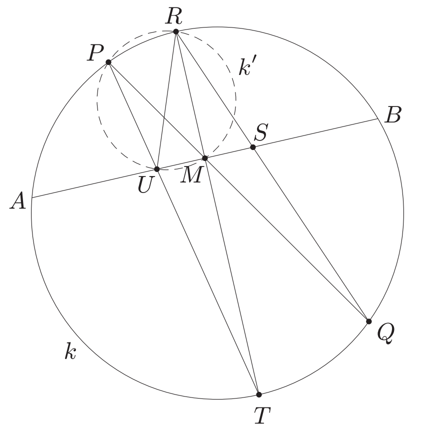
A következő két megoldásban az összehasonlítandó szakaszok mint átmérő és húr jelennek meg egy adott körben.

II. megoldás (*2. ábra*). Toljuk el az RS szakaszt $R'M$-be. Ekkor R' rajta van a k kör R-beli érintőjén, másfelől az eltolás miatt $R'MP\sphericalangle = RQP\sphericalangle$. Ezen kívül, mint a PR ívhez tartozó kerületi szögek a k körben, $R'RP\sphericalangle = RQP\sphericalangle$. Így tehát $R'RP\sphericalangle = R'MP\sphericalangle$, az $MRR'P$ tehát húrnégyszög. Ennek körülírt körében $R'M$ átmérő, hiszen $MRR'\sphericalangle = 90^\circ$, innen pedig $RS = R'M > PM$ következik.



2. ábra

III. megoldás (*3. ábra*). Legyen PT és AB metszéspontja U. Ekkor $UMRP$ húrnégyszög, amelynek k' körülírt körében UR átmérő, hiszen $TPR\sphericalangle = UMR\sphericalangle = 90^\circ$. A kerületi szögek tétele szerint $URM\sphericalangle = UPM\sphericalangle = MRS\sphericalangle$. Mivel M-nél derékszög van, $URM\triangle \cong SRM\triangle$. Így $RS = RU > PM$, mert UR átmérő, PM pedig húr a k' körben.



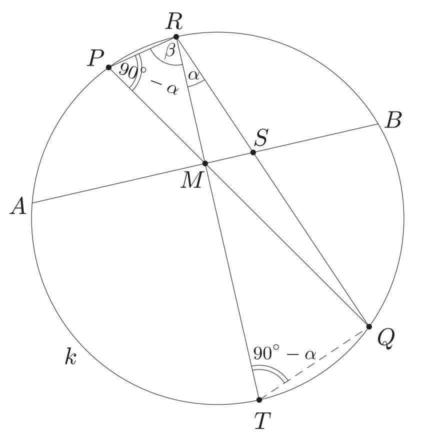
3. ábra

A következő megoldásban a fenti gondolat egy trigonometriai megvalósítását láthatjuk.

IV. megoldás (*4. ábra*). Legyen $TRQ\sphericalangle = \alpha$. Ekkor $RTQ\sphericalangle = RPQ\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Legyen még $PRM\sphericalangle = \beta$ és írjuk fel a szinusz-tételt a PMR háromszögben:

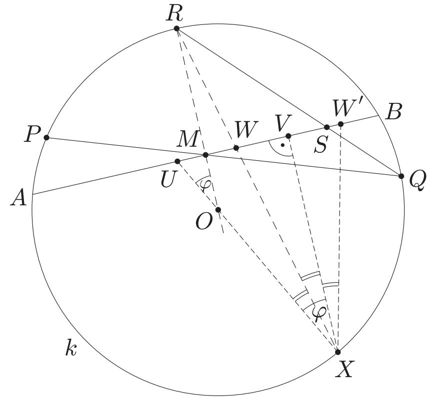
$$\frac{PM}{\sin\beta} = \frac{RM}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{RM}{\cos\alpha},$$

ami éppen RS az RMS derékszögű háromszögben. Így $PM = RS \cdot \sin\beta < RS$.



4. ábra

V. megoldás (*5. ábra*). Legyen X a hosszabbik RP ív felezőpontja. Ekkor nyilván $PQR\sphericalangle = PXR\sphericalangle = \varphi$. Forgassuk el az ábrát X körül a φ szöggel negatív irányba. Ekkor $PX = XR$ miatt P az R-be kerül, így a PQ félegyenes a vele φ szöget bezáró RQ félegyenesbe fordul. A PQ szakasz M pontjának M' elforgatottja tehát az RQ félegyenesen van; azt kell eldöntenünk, hogy itt hol helyezkedik el az S ponthoz képest.



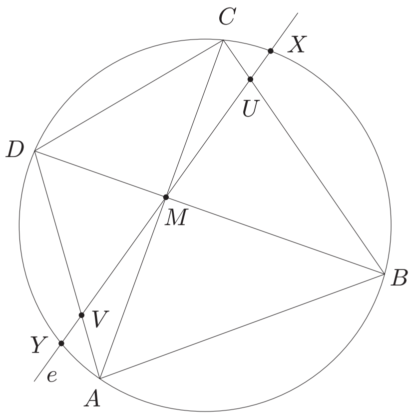
5. ábra

A szimmetria miatt $OXR\sphericalangle = \dfrac{\varphi}{2}$. Ha U jelöli az XO átmérő és az AB húr metszéspontját, akkor az $UOR\sphericalangle$ középponti szög is φ, és ekkor $MUO\sphericalangle = 90° - \varphi$.

Ha V az X-ből az AB húrra állított merőleges talppontja, akkor $UXV\sphericalangle = \varphi$ és így $RXV\sphericalangle = \dfrac{\varphi}{2}$. Ebből következik, hogy az RX és AB húrok W metszéspontjának az X körüli negatív φ szögű elforgatottja az AB szakaszra esik! Mivel $XWM\sphericalangle = XW'M'\sphericalangle$ tompaszög, azért az M pont elforgatottja az AB húr fölött van, ami azt jelenti, hogy $PM = RM' < RS$.

Az alábbi megoldás során felhasználjuk a *Pillangó tétel* néven ismert állítást[1], amely a következőt mondja ki:

Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak M metszéspontján átmenő tetszőleges e egyenes a körülírt kört az X, Y, a húrnégyszög határát pedig az U és V pontokban metszi. Ekkor $MX = MY$ akkor és csak akkor teljesül, ha $MU = MV$ (6. ábra).

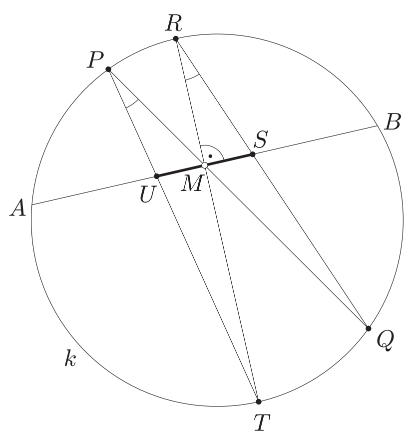


6. ábra

VI. megoldás. A $PTQR$ húrnégyszögben az átlók M metszéspontjára $MA = MB$, így a tétel szerint $MU = MS$, másfelől $MRS\sphericalangle = UPM\sphericalangle$, hiszen mindketten a TQ íven nyugvó kerületi szögek. Ekkor

$$RS = \frac{MS}{\sin MRS\sphericalangle} = \frac{MU}{\sin UPM\sphericalangle} = \frac{MP}{\sin PUM\sphericalangle} \geq MP,$$

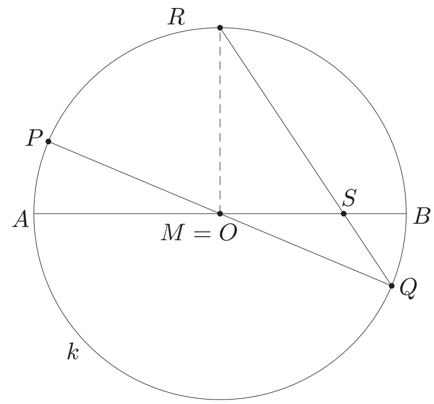
tehát $RS \geq MP$. Egyenlőség akkor lehetne, ha $PUM\sphericalangle$ derékszög lenne. Ez nem lehetséges, mert kiegészítő szöge az UMT derékszögű háromszög egyik hegyesszöge (*7. ábra*).



7. ábra

Megjegyzés. A feladat szövege szükségtelenül teszi fel, hogy az AB húr nem átmérő. Ha AB a k kör átmérője, akkor $M = O$, így $PO = OR$ a k kör sugara és az RMS derékszögű háromszögben $RS > RO$ (*8. ábra*). Ebben az esetben tehát nyilvánvalóan teljesül az $RS > PM$ egyenlőtlenség.

[1] A tétel bizonyítása megtalálható H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Az újrafelfedezett geometria* c. könyvének (Gondolat Kiadó, Budapest, 1977) 80. oldalán.



8. ábra