

Több, mint kétezer évvel ezelőtt a régi görögök arányokra alapozva már használták a *számtani*, a *mértani* és a *harmonikus közép* fogalmát. Legyen x és y pozitív szám, a számtani közepük:

$$A(x, y) := \frac{x + y}{2},$$

a mértani közepük:

$$G(x, y) := \sqrt{xy}$$

és harmonikus közepük:

$$H(x, y) := \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x + y}.$$

Mind a három mennyiség x és y közé esik, ez indokolja a *közép* elnevezést. Ha $x < m < y$, akkor a számtani közepet az

$$y - m = m - x,$$

a mértani közepet az

$$\frac{m}{x} = \frac{y}{m} \quad \text{vagy} \quad \frac{y - m}{m - x} = \sqrt{\frac{y}{x}},$$

végül a harmonikus közepet a kicsit bonyolultabb

$$y = m + \frac{y}{n} \quad \text{és} \quad m = x + \frac{x}{n}$$

tulajdonságok jellemzik. Ha ebből az egyenletrendszerből n -et kiküszöböljük, akkor egy egyszerűbb alakot kapunk:

$$\frac{y - m}{m - x} = \frac{y}{x}.$$

A régi görögök a kocka geometriai harmóniáját látták abban a tényben, hogy az élek számának és a lapok számának harmonikus közepe éppen a csúcsok száma.

Az x , $A(x, y)$, $H(x, y)$ és y számok arányai közötti

$$x : A(x, y) = H(x, y) : y$$

összefüggést már a babiloniaiak is ismerték, de feledésbe ment, *Pitagorasz* újra felfedezte. Az említett közepeket egyébként pitagoraszai közepeknek is szokták nevezni.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségre egy algebrai és egy geometriai bizonyítást adunk. A

$$(1) \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

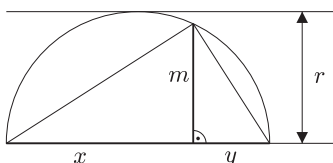
$$4xy \leq (x + y)^2$$

egyenlőtlenséggel, ami nem más, mint

$$0 \leq (x - y)^2.$$

Ez mindig igaz, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y$. Ezzel az (1) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk, sőt szükséges és elégséges feltételt is kaptunk az egyenlőségre.

A geometriai bizonyítás a derékszögű háromszögre vonatkozó magasságtételre alapszik.



A magasságtétel szerint $m = \sqrt{xy}$, ahol x és y az átfogó szeletei. A háromszög köré írt kör r sugara x és y számtani közepe. Az ábrából látszik, hogy $m \leq r$, és ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

A harmonikus és a mértani közép közötti

$$H(x, y) \leq G(x, y)$$

egyenlőtlenség egyszerű számolással visszavezethető a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségre.

Most az (1) egyenlőtlenség többváltozós alakját kívánjuk igazolni. Legyenek x_1, x_2, x_3 és x_4 pozitív számok. Az (1) egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sqrt{(x_1 x_2)} \sqrt{(x_3 x_4)} \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right).$$

A jobb oldalon álló szorzatra megint alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right) \leq \left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} \right)^2.$$

A két egyenlőtlenséget összevetve és négyzetgyököket vonva az adódik, hogy

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség négyváltozós alakja. Ugyanezt az eljárást ismételve juthatunk el az

$$(2) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

egyenlőtlenséghez, ahol $n = 2^k$. Ha az x_i -k között v darab x és $n - v$ darab y van, akkor egyenlőtlenségünk az

$$\sqrt[n]{x^v y^{n-v}} = x^{\frac{v}{n}} y^{\frac{n-v}{n}} \leq \frac{vx + (n-v)y}{n} = \frac{v}{n}x + \frac{n-v}{n}y$$

formát ölti. Ez áttekinthetőbb, ha $\frac{v}{n}$ helyébe α -t írunk:

$$(3) \quad x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y.$$

Így a súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenséghez jutottunk, ami $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén adja vissza (1)-t. Bizonyításunkban α nem lehet egyelőre tetszőleges $(0; 1)$ -beli szám, csupán $\frac{v}{2^k}$ alakú. (Az ilyen számokat néha *diadikus racionálisoknak* nevezik.) $\frac{v}{2^k}$ alakú számokkal bármilyen $\alpha \in (0, 1)$ közelíthető, ezért a (3) egyenlőtlenség minden 0 és 1 közé eső α -ra igaz.

A gondolatmenetet egy kicsit továbbfejlesztve eljuthatunk az

$$(4) \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

egyenlőtlenséghez, ami akkor igaz, ha az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ pozitív számokra $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ teljesül. (4) a *súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenség* általános alakja.

A súlyozott számtani közép előfordul például a következő helyzetben: Tegyük fel, hogy egy diáknak van két darab 5-ös dolgozata és egy 1-es és egy 2-es felelete. Úgy akarjuk kiszámítani az átlagát, hogy a dolgozatai kétszer olyan súllyal számítanak, mint a feleletei. Ekkor az átlag:

$$\frac{(5+5) + (5+5) + 1 + 2}{6} = \frac{2}{6} \cdot 5 + \frac{2}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = 3,8\bar{3}.$$

Ha az egyszerű átlagot számoljuk, akkor 3,25 kerekítve 3-as. De ha figyelembe vesszük a dolgozatok nagyobb súlyát, akkor a diák a 4-est is megérdemli.

A logaritmikus közép

Az x és y pozitív számok *logaritmikus közepe*:

$$(5) \quad L(x, y) := \begin{cases} \frac{x-y}{\ln x - \ln y}, & \text{ha } x \neq y, \\ x, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

Ez a képlet jóval bonyolultabb, mint a számtani, vagy a mértani közép. Az sem látszik azonnal, hogy $L(x, y)$ egy pozitív szám, még kevésbé az, hogy x és y közé esik. Mindezek a tulajdonságok igazak és következnek az alábbi tételből.

1. tétel.

$$G(x, y) \leq L(x, y) \leq A(x, y)$$

minden pozitív x és y számra.

Bizonyítás. Osszuk el a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leq \frac{x+y}{2}$$

igazolandó egyenlőtlenséget y -nal, így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \leq \frac{\frac{x}{y} - 1}{\ln \frac{x}{y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + 1 \right).$$

Látjuk, hogy mindenütt x -nek és y -nak a hányadosa szerepel, ezért érdemes ennek helyébe egy új változót írni, mondjuk z^2 -et:

$$z \leq \frac{z^2 - 1}{2 \ln z} \leq \frac{1}{2}(z^2 + 1).$$

Tehát a következő két egyenlőtlenséget kell igazolnunk:

$$(6) \quad 2z \leq \frac{z^2 - 1}{\ln z}$$

és

$$(7) \quad \frac{z^2 - 1}{\ln z} \leq z^2 + 1.$$

Az egyszerűség kedvéért mindkét egyenlőtlenséget a $z > 1$ esetben igazoljuk (ekkor $\ln z > 0$), a $0 < z < 1$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható. Így (7) a

$$\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \leq \ln z$$

alakot ölti. $z = 1$ esetén mindkét oldal 0. Az egyenlőtlenség biztosan fennáll, ha a bal oldal lassabban növekszik, mint a jobb, vagyis a bal oldal deriváltja kisebb, mint a jobb oldalé. Elvégezzük a deriválást. Meg kell mutatnunk, hogy

$$\frac{2z(z^2 + 1) - (z^2 - 1)2z}{(z^2 + 1)^2} \leq \frac{1}{z},$$

amit átrendezve

$$0 \leq z^4 - 2z^2 + 1 = (z^2 - 1)^2$$

adódik. Természetesen ez igaz, így (7) bizonyítását elvégeztük.

A (6) egyenlőtlenséget a

$$(8) \quad 2 \ln z \leq \frac{z^2 - 1}{z}$$

formára hozzuk. $z = 1$ esetén mindkét oldal 0. Hasonlóan, mint az előző esetben, megmutatjuk, hogy a bal oldal deriváltja kisebb, mint a jobb oldalé. Most a következő egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk:

$$\frac{2}{z} \leq \frac{2z \cdot z - (z^2 - 1) \cdot 1}{z^2},$$

ami átrendezés után

$$2 \leq z + \frac{1}{z},$$

és tovább alakítva

$$0 \leq (z - 1)^2.$$

Ez nyilvánvaló, és ezzel a (6) egyenlőtlenség bizonyítását befejeztük.

Ha tudunk integrálni, akkor az

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$$

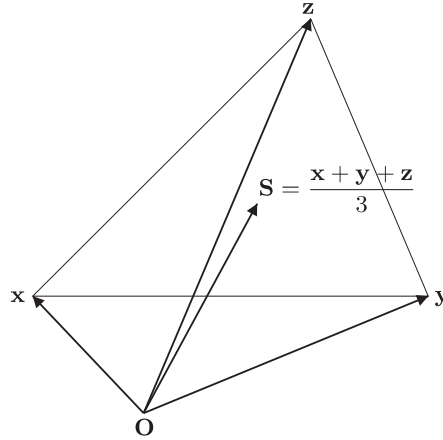
egyenlőtlenségeket integrálva α szerint 0-tól 1-ig, éppen az $L(x, y) \leq A(x, y)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből azt is megjegyezhetjük, hogy a logaritmikus közép a súlyozott mértani közepeknek a súlyok szerint vett integrálja. (A számtani közép pedig a súlyozott számtani közepek hasonló integrálja.)

Legyenek $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ a sík vektorai. Számtani közepük

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{n}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n).$$

Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk az $n = 3$ esettel. Ekkor a három vektort inkább az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ betűkkel jelöljük. Ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ és $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, akkor

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \left(\frac{1}{3}(x_1 + y_1 + z_1), \frac{1}{3}(x_2 + y_2 + z_2) \right).$$



Az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok számtani közepe nem más, mint a három pont által meghatározott háromszög súlypontjába mutató vektor. A számtani középnek tehát egyszerű geometriai jelentése van

2. tétel. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ három vektor a síkon. Ekkor a sík helyvektorain értelmezett

$$\mathbf{w} \mapsto |\mathbf{w} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^2$$

függvény minimumhelye a három vektor számtani közepe. (Itt az abszolútértékjel a vektorok hosszát jelöli.)

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{m}$ az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok számtani közepét,

$$\mathbf{m} := \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}}{3}.$$

A következő azonosság maga a bizonyítás:

$$\begin{aligned} |\mathbf{w} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^2 &= \\ &= 3|\mathbf{w} - \mathbf{m}|^2 + |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 - \frac{1}{3}|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}|^2. \end{aligned}$$

Tételezzük fel, hogy van egy gépünk, ami két vektornak megadja a számtani közepét. Lehetne-e ezt a gépet három vektor számtani közepének meghatározására használni? Közvetlen módon talán nem, de építhetnénk belőle egy új berendezést, amely három bemenő vektorból három kimenő vektort ad meg. Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ a bemenő vektorok, akkor a kimenők

$$\mathbf{x}' := \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z}), \quad \mathbf{y}' := \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{x}), \quad \mathbf{z}' := \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

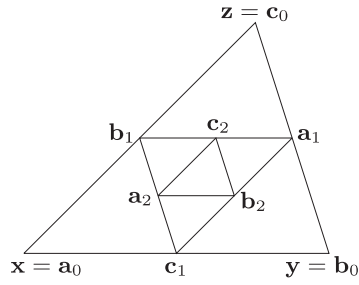
Új berendezésünk azt a gépet használja, amely két vektornak képes megadni a számtani közepét. Ezt a berendezést használjuk ismételtén, az általa kiadott vektorokat tápláljuk be újra és újra. Így a következő rekurziót végeztetjük.

Legyen az $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0)$ vektorhármás a kiindulási $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ hármas. Ha az $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ hármas már megvan, akkor a berendezésnek beadva, az kiadja az $(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{c}_{n+1})$ hármaszt, az

$$\mathbf{a}_{n+1} := \frac{1}{2}(\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n), \quad \mathbf{b}_{n+1} := \frac{1}{2}(\mathbf{c}_n + \mathbf{a}_n), \quad \mathbf{c}_{n+1} := \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$$

képletek szerint. Amint n növekszik, az $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ vektorhármások egyre kisebb Δ_n háromszögeket határoznak meg, és egyre jobban megközelítik a kezdetben adott három vektor számtani közepét, amely Δ_0 súlypontja. Valójában a $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ háromszögek súlypontjai egybeesnek, hiszen a rekurzióból adódóan

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1} + \mathbf{c}_{n+1}) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}_n + \mathbf{a}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \right) = \\ &= \frac{1}{3}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n). \end{aligned}$$



A rekurzióval értelmezett (a_n, b_n, c_n) vektorhármassok által meghatározott háromszögek egyre kisebbek, és megközelítik az a_0 , b_0 és c_0 vektorok számtani közepét, a súlypontot

Befejezésül megemlítjük, hogy ha az

$$a_{n+1} := M(b_n, c_n), \quad b_{n+1} := M(c_n, a_n), \quad c_{n+1} := M(a_n, b_n)$$

rekurziót egy a_1, b_1, c_1 számhármassból indítjuk M helyében a geometriai középpel, akkor a határérték az adott számhármass geometriai közepe (hasonlóan a fent részletezett számtani közép esetéhez). Ha M helyébe a logaritmikus közepet tesszük, akkor a_n, b_n és c_n közös határértéke létezik, és méltán nevezhetjük a három szám logaritmikus közepének.