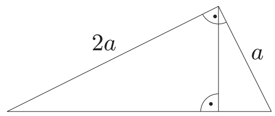
I. rész

1. *Egy derékszögű háromszögben a két befogó hosszának aránya* $1:2$*, továbbá a kerület és terület mérőszámai egyenlők. Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasság hosszának pontos értékét.* (*11 pont*)



Megoldás. A háromszög befogói: a, $2a$, ekkor az átfogója: $a\sqrt{5}$. A háromszög területe: a^2, a kerülete: $a\left(3+\sqrt{5}\right)$. Tudjuk, hogy $a^2 = a\left(3+\sqrt{5}\right)$. Mivel $a=0$ nem lehet, így $a = 3+\sqrt{5}$. A háromszög területét az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság segítségével is kiszámíthatjuk:

$$T = \frac{a\sqrt{5}\cdot m}{2}.$$

A kétféle módon felírt területek egyenlőségéből és az a kiszámolt értékéből kapjuk:

$$\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{5}\cdot m}{2} = \left(3+\sqrt{5}\right)^2.$$

Ebből kifejezhető az m értéke:

$$m = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+10}{5}.$$

2. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - 6x - 6y &= 0 \\ xy - x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ (*12 pont*)

Megoldás. Az első egyenletet írhatjuk szorzat alakban: $(x+y)(x-y-6)=0$. Ebből következik, hogy $y=-x$ vagy $y=x-6$. Mindkét esetben a második egyenletbe behelyettesítve x-re másodfokú egyenletet kapunk.

Az első esetben: $x^2+2x=0$.

Az ebből kapott x értékekhez kiszámítjuk az y-t is: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-2$, $y_2=2$.

A második esetben: $x^2-6x-6=0$.

Az ebből kapott x értékekhez kiszámítjuk az y-t is: $x_3=3+\sqrt{15}$, $y_3=-3+\sqrt{15}$; $x_4=3-\sqrt{15}$, $y_4=-3-\sqrt{15}$.

3. *Egy egyfordulós röplabdakupán – ahol tehát bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással –* 30 *lejátszott mérkőzés után még minden csapatnak három mérkőzése volt hátra. Hány csapat szerepelt a kupán?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen a csapatok száma n. Az összes mérkőzések száma: $\frac{n(n-1)}{2}$. Minden csapatnak még 3 mérkőzése volt hátra, ez összesen $\frac{3n}{2}$ mérkőzés. Ezért a lejátszott mérkőzések száma:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{3n}{2} = 30,$$

amiből az $n^2-4n-60=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A gyökök: $n_1=10$, $n_2=-6$. A röplabdakupán 10 csapat vett részt.

4. *Egy üzem termelése öt egymást követő évben mindig nőtt, az első évben* 12*, a másodikban* 15*, a harmadikban* 20%*-kal. A negyedik és az ötödik évben a növekedés százaléka azonos volt. Az ötödik évben az üzem a vizsgált időszakot megelőző év termelésének* $2{,}3$*-szeresét érte el. Hány százalékkal növekedett a termelés a negyedik és az ötödik évben?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen az üzem termelése a vizsgált öt év előtti évben egységnyi, a vizsgált időszak negyedik és ötödik évében a termelés növekedése $p\%$. Legyen $1+\frac{p}{100}=q$. A feladat szövege szerint: $1{,}12\cdot 1{,}15\cdot 1{,}2\cdot q\cdot q = 2{,}3$, amiből $1{,}5456q^2 = 2{,}3$, azaz $q\approx 1{,}22$.

A termelés a negyedik és az ötödik évben is 22%-kal növekedett.

II. rész

5. *a) Az $x^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei 2-vel nagyobbak, mint az $x^2+cx+b=0$ egyenlet gyökei. Számítsuk ki b és c értékét.*

b) Az $x^2+bx+c=0$ egyenlet egyik gyöke 6, a másik gyöke egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Számítsuk ki b és c értékét.

c) Az x^2+bx+c másodfokú polinom két zérushelye x_1 és x_2. Írjunk fel olyan harmadfokú polinomot, amelynek zérushelyei: x_1+x_2; $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; $x_1^3+x_2^3$. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A második egyenlet gyökei x_1 és x_2, tehát $x_1+x_2=-c$, $x_1x_2=b$. Ekkor

$$x_1+2+x_2+2=-c+4=-b,$$

valamint

$$(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=b-2c+4=c.$$

A $b=c-4$ és a $b=3c-4$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása: $b=-4$, $c=0$.

b) Mivel $x_1=6$ és $x_2=D=b^2-4c$, azért

$$x_1+x_2=6+b^2-4c=-b \qquad \text{és} \qquad x_1x_2=6(b^2-4c)=c.$$

A $b^2+b-4c+6=0$ és a $6b^2-25c=0$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása: $b_1=-10$, $c_1=24$ és $b_2=-15$, $c_2=54$.

c) Mivel $x_1+x_2=-b$ és $x_1x_2=c$, azért $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=-cb$ és

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-b^3+3cb.$$

A keresett polinom szorzat alakban: $(x+b)(x+cb)(x+b^3-3cb)$. Elvégezve a beszorzást:

$$x^3+b(b^2-2c+1)x^2+b^2(b^2+b^2c-3c^2-2c)x+b^3c(b^2-3c).$$

6. *Oldjuk meg a $(4-\cos 8x)(2+\cos 2x)=15$ egyenletet.* (*16 pont*)

Megoldás. Vizsgáljuk meg a szorzat tényezőinek lehetséges értékeit. Mivel a koszinuszfüggvény értékkészlete $[-1;1]$, azért $3\le 4-\cos 8x\le 5$ és $1\le 2+\cos 2x\le 3$.

A szorzat csak akkor egyenlő 15-tel, ha mindkét tényező maximális. Így a következő két egyenlet közös gyökeit keressük: $4-\cos 8x=5$ és $2+\cos 2x=3$, azaz $\cos 8x=-1$ és $\cos 2x=1$.

Az elsőből:

$$x_1=\frac{\pi}{8}+k_1\cdot\frac{\pi}{4}, \quad \text{ahol} \quad k_1\in\mathbb{Z},$$

a másodikból: $x_2=k_2\cdot\pi$, ahol $k_2\in\mathbb{Z}$.

A kapott x_1 és x_2 értékek között nincs közös, ezért az eredeti egyenletnek nincs valós megoldása.

7. *a) Egy 27 fős osztályba 5-tel több lány jár, mint fiú. Mekkora a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztott három tanuló között két fiú és egy lány van?*

b) Egy 27 fős osztályból kiválasztunk két tanulót. Határozzuk meg az osztályban a fiúk számát úgy, hogy a legnagyobb valószínűsége legyen annak, hogy a kiválasztott tanulók különböző neműek. Mekkora ez a maximális valószínűség?

c) A 27 fős 11. osztályban egy rosszul sikerült matematika dolgozat átlaga pontosan 2. Az 5-ös, 4-es, 3-as osztályzatok száma egyenlő és azt is tudjuk, hogy valamennyi érdemjegy előfordult. Mennyi lehet az osztályzatok módusza és a mediánja? (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Három tanulót

$$\binom{27}{3}=\frac{27\cdot 26\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3}=2925\text{-féleképpen}$$

tudunk kiválasztani az osztályból. Az osztályba 16 lány és 11 fiú jár. A 11 fiúból

$$\binom{11}{2}=\frac{11\cdot 10}{1\cdot 2}=55\text{-féleképpen}$$

választhatunk ki kettőt. Mindegyik kiválasztáshoz tartozhat a 16 lány bármelyike, vagyis a kedvező esetek száma $16\cdot 55=880$. A keresett valószínűség: $\dfrac{880}{2925}\approx 0{,}3$.

b) Ha a fiúk számát n-nel jelöljük, akkor a lányok száma $27-n$.

Az összes eset $\dfrac{27\cdot 26}{2}=351$, a kedvező esetek száma:

$$n(27-n)=-(n-13{,}5)^2+182{,}25.$$

Ez $n = 13{,}5$ esetén lenne maximális. Mivel n egész szám, azért a kedvező esetek száma akkor maximális, ha $n = 13$ vagy $n = 14$.

Vagyis 13 fiú és 14 lány, illetve 14 fiú és 13 lány esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy 1 fiút és 1 lányt választottunk. Ez a valószínűség:

$$\mathrm{P}(1 \text{ fiú}, 1 \text{ lány}) = \frac{13 \cdot 14}{351} = \frac{14}{27} \approx 0{,}52.$$

c) A feltételek alapján legyen a db elégtelen, b db elégséges, c db közepes, jó és jeles. Ekkor

$$a + b + 3c = 27 \qquad \text{és} \qquad \frac{a + 2b + c(3+4+5)}{27} = 2.$$

A második egyenletet alakítjuk: $a + 2b + 12c = 54$. A két egyenletből a c-t kiejtjük, ezután: $a = 18 - \frac{2b}{3}$. A b lehetséges értékeihez kiszámoljuk az a-t és a c-t:

b	3	6	9	12	15	18	21	24
a	16	14	12	10	8	6	4	2
c	–	–	2	–	–	1	–	–

A c csak két esetben lett egész, ezek a számhármasok minden feltételnek megfelelnek.

	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös	
1. eset (db)	12	9	2	2	2	Ekkor a módusz: 1, a medián: 2.
2. eset (db)	6	18	1	1	1	Ekkor a módusz: 2, a medián: 2.

8. *Egy harmadfokú $f(x)$ függvényről tudjuk, hogy $f(1) = f(3) = 4$, a harmadfokú tag együtthatója 1, továbbá $\int_1^5 f(x)\,dx = 16$. Írjuk fel a függvénygörbe érintőjének egyenletét a 4 abszcisszájú pontjában.* (*16 pont*)

Megoldás. A harmadfokú függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d.$$

Tudjuk, hogy: $f(1) = 1 + b + c + d = 4$, $f(3) = 27 + 9b + 3c + d = 4$, továbbá:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (x^3 + bx^2 + cx + d)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^3}{3} + c \cdot \frac{x^2}{2} + d \cdot x\right]_1^5 =$$

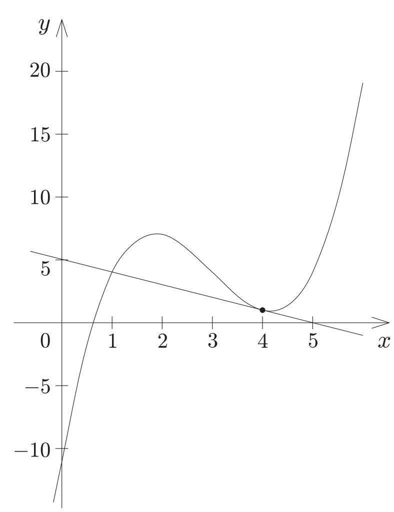
$$= \frac{625}{4} + b \cdot \frac{125}{3} + c \cdot \frac{25}{2} + 5d - \frac{1}{4} - b \cdot \frac{1}{3} - c \cdot \frac{1}{2} - d$$

$$= \frac{124}{3} b + 12c + 4d + 156 = 16.$$

A kapott három egyenlet rendezése után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} b + c + d &= 3 \\ 9b + 3c + d &= -23 \\ 31b + 9c + 3d &= -105. \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $b = -9$, $c = 23$, $d = -11$, azaz a harmadfokú függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 11$.



Meghatározzuk a keresett érintő meredekségét. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 18x + 23$, így $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 + 23 = -1$. Az érintő meredeksége: $m = -1$.

Mivel $f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 23 \cdot 4 - 11 = 1$, azért az érintési pont koordinátái: $E(4; 1)$.

Az $E(4; 1)$ pontra illeszkedő, $m = -1$ meredekségű érintő egyenlete: $x + y = 5$.

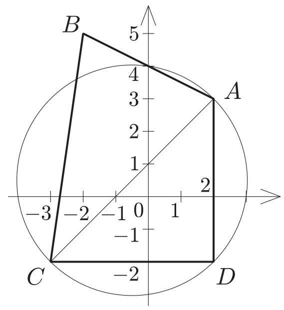
9. *Adottak az $ABCD$ konvex négyszög három csúcsának koordinátái: $A(2; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(-3; -2)$, továbbá a D csúcsnál lévő belső szöge, ami $90°$.*

a) Számítsuk ki az ABC háromszög területét.

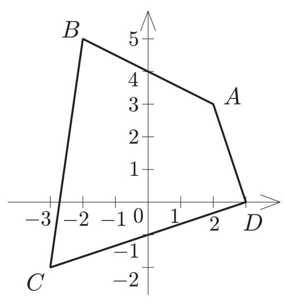
b) Határozzuk meg a D csúcs koordinátáit úgy, hogy az $ABCD$ négyszög területe maximális legyen.

c) Mekkora az $ABCD$ négyszög kerülete, ha a D pont illeszkedik az x tengelyre? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az AC átló hossza $5\sqrt{2}$, a B csúcs távolsága az AC egyenestől $3\sqrt{2}$ egység. Innen az ABC háromszög területe: $\dfrac{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 15$ területegység.



b) Az ABC háromszög területe nem változik, ezért a D csúcsot úgy kell meghatároznunk, hogy az ACD derékszögű háromszög területe maximális legyen. Mivel AC adott, azért a D távolsága az AC-től maximális kell, hogy legyen. A D pont illeszkedik az AC Thalész-körére, és az előzőek alapján illeszkednie kell az AC felező merőlegesére is. Ennek egyenlete: $y + x = 0$. Az egyenes megfelelő metszéspontja a Thalész-körrel: $D(2; -2)$.



c) Legyen az x tengelyre illeszkedő, a feladat feltételeinek megfelelő pont: $D(d; 0)$. Ekkor $AD^2 = (d-2)^2 + 9$, $CD^2 = (d+3)^2 + 4$. Mivel az ACD háromszög derékszögű, azért Pitagorasz-tétele szerint: $(d-2)^2 + 9 + (d+3)^2 + 4 = 50$. A rendezés után a $d^2 + d - 12 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek csak a $d = 3$ megoldása lesz megfelelő. A $D(3; 0)$ koordinátájú pont a feladat feltételeit teljesíti. Az így kapott $ABCD$ konvex négyszög kerülete:

$$AB + BC + CD + DA = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + \sqrt{10} \approx 21 \text{ (egység)}.$$