

A MATEMATIKA v SKOLE (Matematika az iskolában) c. folyóirat beszámol a moszkvai iskolák 1949. évi matematikai olimpiászáról, melyet a moszkvai matematikai társaság, a moszkvai állami LOMONOSZOV egyetem és Moszkva város népművelési bizottsága rendezett. A versenyre komoly tanulóköri munkával készültek, ahol több professzor előadást is tartott a versenyre készülőknek. Az olimpiász első fordulóját április 3-án tartották. A VII.–VIII.-osok versenyén 299-en, a IX.–X. osztályosokén pedig 608-an indultak. Legnagyobbrészt moszkvai diákok, de néhányan távoli városokból utaztak a verseny színhelyére.

A második fordulóra a VII.–VIII.-os csoportból 99 résztvevő jutott be, a IX.–X.-esek közül 244-en. Az előbbiben nem adták ki az első díjat. II. díjat nyert 4, III.-at 7 tanuló, 12-en pedig dicséretben részesültek. A IX.–X.-es csoportban ketten nyertek első díjat, 6-an második díjat, 8-an harmadik díjat. Dicséretben részesült 18 versenyző. A nyertesek matematika-könyveket kaptak, az elsők egész kis könyvtárat, hogy tartani is alig bírták.

Az alábbiakban kitűzzük az első forduló tételeit megoldásra. Ezekből egyet választottak ki a versenyzők.

1. VII.-VIII.- os csoport:

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

osztható maradék nélkül 26460-nal.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sokszögnek több szimmetria tengelye van, azok mind egy pontban találkoznak.

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

egyenletnek nincs más egész értékű megoldása, mint $x = y = z = 0$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha. egy síkbeli zárt törtvonal hosszúsága 1, akkor a törtvonal lefedhető egy $1/4$ sugarú körrel.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges háromszögben a beírt kör középpontját és valamelyik, a háromszöghöz hozzáírt kör középpontját összekötő egyenesszakaszt a háromszög köré írt kör felezi.

2. IX.-X.-es csoport:

1. Keressünk olyan x , y , z és v egész számokat, melyekre teljesül, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv.$$

2. Hogyan helyezkednek el a szimmetria síkjai annak a testnek, melynek két forgástengelye van? (Egy test forgástengelyének azt az egyenest nevezzük, mely körül bármilyen szöggel elforgatva önmagába megy át.)

3. Keressük meg a következő egyenlet valós gyökeit:

$$(I) \quad x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{4}\right)$$

4. Legyen $4n$ pozitív számunk, melyeknek az a tulajdonsága, hogy bármely 4 egymástól különbözőből geometriai haladványt alkothatunk, Bizonyítsuk be, hogy ezek között a számok között található n egyenlő.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és a szemközti csúcsokat összekötő átlók egyenlők, akkor kör írható a hatszög köré.