

## I. rész

1. Határozzuk meg a  $k$  értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós gyöke:

$$\sqrt{x^2 - 2005x - 2006} + \sqrt{x^2 - 2007x + 2006} + \sqrt{x^2 - k^2} = 0.$$

(11 pont)

**Megoldás.** Három nemnegatív valós szám összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla. A másodfokú kifejezéseket szorzattá bonthatjuk:

$$\sqrt{(x+1)(x-2006)} + \sqrt{(x-1)(x-2006)} + \sqrt{(x+k)(x-k)} = 0.$$

Az első két tag értéke csak akkor nulla egyszerre, ha  $x = 2006$ . Ha van megoldás, akkor a harmadik tagnak is nullának kell lennie 2006 helyettesítésénél:

$$(2006)^2 - k^2 = (2006 + k)(2006 - k) = 0.$$

Vagyis  $k_1 = 2006$  vagy  $k_2 = -2006$ .

2. Egy mértani sorozat három egymást követő tagja közül a harmadik  $-2$ . Ha ezt az első kettő elé rakjuk, akkor egy számtani sorozat egymást követő három tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot. (12 pont)

**Megoldás.** A számtani sorozat tagjai:  $-2; -2 + d; -2 + 2d$ .  
A mértani sorozat tagjai:  $-2 + d; -2 + 2d; -2$ .

A mértani sorozatban  $(-2 + 2d)^2 = -2(-2 + d)$ .

Rendezzük ezt az egyenletet:  $4 - 8d + 4d^2 = 4 - 2d$ ,  $4d^2 - 6d = 0$ ,  $2d(2d - 3) = 0$ . Két értéket kapunk  $d$ -re:  $d_1 = 0$  vagy  $d_2 = 1,5$ . Az eredeti három szám:  $-2; -2; -2$  vagy  $-0,5; 1; -2$ . Mindkét számháromas megfelel a feltételeknek.

3. Adjuk meg a következő összeget tized pontossággal:

$$\lg\left(7 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \lg\left(7^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \lg\left(7^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\right) + \dots + \lg\left(7^{999} \cdot \sqrt{\frac{999}{1000}}\right).$$

(14 pont)

**Megoldás.** Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\lg 7 + \lg \sqrt{\frac{1}{2}} + \lg 7^2 + \lg \sqrt{\frac{2}{3}} + \lg 7^3 + \lg \sqrt{\frac{3}{4}} + \dots + \lg 7^{999} + \lg \sqrt{\frac{999}{1000}}.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$(\lg 7 + \lg 7^2 + \dots + \lg 7^{999}) + \left(\lg \sqrt{\frac{1}{2}} + \lg \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \lg \sqrt{\frac{999}{1000}}\right).$$

Az első zárójeles kifejezést tovább alakítjuk, a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\begin{aligned} \lg 7 + \lg 7^2 + \dots + \lg 7^{999} &= 1 \cdot \lg 7 + 2 \cdot \lg 7 + \dots + 999 \cdot \lg 7 = \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 999) \cdot \lg 7 = \frac{999 \cdot (999 + 1)}{2} \cdot \lg 7 = 499\,500 \cdot \lg 7. \end{aligned}$$

Most a második zárójelben lévő összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\begin{aligned} \lg \sqrt{\frac{1}{2}} + \lg \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \lg \sqrt{\frac{999}{1000}} &= \lg \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \dots \sqrt{\frac{999}{1000}} \right) = \\ &= \lg \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1000}} = \lg \sqrt{\frac{1}{1000}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

A keresett összeg:  $499\,500 \cdot \lg 7 - \frac{3}{2} \approx 422\,125,0$ .

4. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AB$  alapja  $56$  cm, a szárjai  $53$  cm hosszúak. Tudjuk, hogy az  $AB$  alap  $F$  felezőpontja, a beírt körének az  $O$  középpontja, a köré írt körének a  $K$  középpontja, az  $S$  súlypontja, az  $M$  magasságpontja és a  $C$  csúcspontja egy egyenesen vannak.

a) Hány háromszöget határoznak meg az  $F, O, K, S, M, C$  és  $A$  pontok?

b) Számítsuk ki az  $ASK$  háromszög területét.

c) Számítsuk ki az  $FO$  hosszát. (14 pont)

**Megoldás.** a) Mivel az  $F, O, K, S, M, C$  pontok egy egyenesre illeszkednek, azért csak úgy jön létre valódi háromszög, ha egyik csúcsa  $A$ , a másik kettő pedig tetszőlegesen választott pontpár a fenti 6 pont közül. A háromszögek száma:  $\binom{6}{2} = 15$ .

b) Az  $ASK$  háromszögben az  $A$ -ból húzható magasság hossza:  $AF = 28$  cm. Az  $SK$  oldal hossza az  $FK$  és  $FS$  szakaszok hosszának a különbsége. Az  $AB$  alaphoz tartozó magasságot Pitagorasz-tétellel számítva az  $ACF$  háromszögből:  $28^2 + m_c^2 = 53^2$ , ebből  $m_c = 45$  cm.

A köré írható kör középpontja az alaptól  $45 - R$  távolságra van. A köré írt kör  $R$  sugarát a Pitagorasz-tétellel határozhatjuk meg:  $28^2 + (45 - R)^2 = R^2$ , ebből  $R = \frac{2809}{90}$  cm, vagyis a háromszög körülírt körének középpontja az alap egyenesétől  $45 - \frac{2809}{90} = \frac{1241}{90}$  ( $\approx 13,79$ ) cm-re van.

A súlypont a súlyvonal alaphoz közelebbi harmadolópontja, tehát a súlypont és az alap egyenesének távolsága  $45 \cdot \frac{1}{3} = 15$  cm.

$$SK = 15 - \frac{1241}{90} = \frac{109}{90}, \quad \text{azaz} \quad T_{ASK} = \frac{28 \cdot \frac{109}{90}}{2} = \frac{1526}{90} \quad (\approx 16,96 \text{ cm}^2).$$

c) A beírt kör középpontja az alaptól  $r$  távolságra van. A beírt kör  $r$  sugarát a háromszög területének kétféle felírásából határozhatjuk meg:  $t = rs = \frac{c \cdot m_c}{2}$ , ahol  $s = \frac{k}{2}$ , és  $k = 2 \cdot 53 + 56 = 162$ . Ekkor  $81r = 1260$ , ebből  $r = \frac{140}{9}$  cm. A beírt kör középpontja az alap egyenesétől  $\frac{140}{9}$  ( $\approx 15,56$ ) cm-re van. Ez az  $FO$  hossza.

## II. rész

5. Ha a  $[-3; 3]$  intervallumon értelmezett  $f(x) = 3|x|$  és  $g(x) = x^2$  hozzárendelésű függvények görbáját az  $y$  tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár alakú testet kapunk. Adjuk meg a két pohár térfogatának eltérését deciliterben, ha a koordinátarendszer egysége 1,5 cm. (16 pont)

**Megoldás.** Az első pohár kúp alakú. Alapkörének sugara:  $r = 3$ , magassága:  $m = 9$ . A térfogata:

$$V_1 = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{9 \cdot \pi \cdot 9}{3} = 27\pi \approx 84,82 \text{ térfogategység.}$$

Ha 1 hosszúságegység egyenlő 1,5 cm-rel, akkor a térfogat mérőszámát  $1,5^3$ -nal kell szoroznunk. Az eredmény kerekítve  $286,3 \text{ cm}^3$ , ami  $2,863 \text{ dl}$ .

A második pohár is forgástest alakú. Ha az  $x$  tengely körül megforgatjuk a  $[0; 9]$  intervallumon a  $h(x) = \sqrt{x}$  függvény görbáját, akkor is ezt a testet kapjuk. Ennek térfogata:

$$V_2 = \pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^9 = \frac{81}{2} \pi \approx 127,23 \text{ térfogategység.}$$

A térfogat mérőszámát  $1,5^3$ -nal szorozva, kerekítve  $429,4 \text{ cm}^3$ -t kapunk, ami  $4,294 \text{ dl}$ .

A második pohár térfogata közelítőleg  $1,431 \text{ dl}$ -rel nagyobb, mint az elsőé.

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left( \frac{\sqrt{5}}{11} \right)^{\frac{2}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = 24,2.$$

(16 pont)

**Megoldás.** A feladat értelmezési tartománya: csak pozitív számnak van logaritmusa, ezért  $x > 0$ , továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért  $x \neq 10^5$ , valamint  $x \neq 10^{-1}$ . Mivel

$$24,2 = \frac{242}{10} = \frac{121}{5} = \left( \frac{11}{\sqrt{5}} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{5}}{11} \right)^{-2},$$

azért az eredeti egyenletünk így írható:

$$\left( \frac{\sqrt{5}}{11} \right)^{\frac{2}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = \left( \frac{\sqrt{5}}{11} \right)^{-2}.$$

Ebből kapjuk:  $\frac{2}{-5 + \lg x} - \frac{4}{1 + \lg x} = -2$ .

Az egyenlet a következő alakra hozható:  $\lg^2 x - 5 \lg x + 6 = 0$ , amiből  $\lg x_1 = 2$ ,  $\lg x_2 = 3$ . Innen  $x_1 = 100$ ,  $x_2 = 1000$ . Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

7. Adott három kör az egyenletével:

$$x^2 + 8x + y^2 - 4y + 16 = 0,$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 6 = 0,$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 12y + 36 = 0.$$

a) Számítsuk ki a középpontjaik által meghatározott háromszög kerületét és területét.

b) Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az adott körök belülről érintenek. (16 pont)

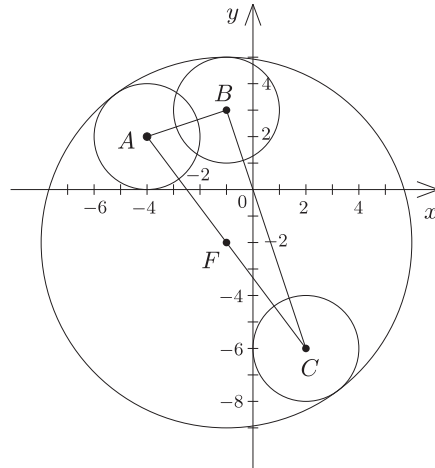
**Megoldás.** A körök egyenletét átírhatjuk a következő alakba:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4,$$

$$(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 4.$$

A három kör középpontja  $A(-4; 2)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(2; -6)$ .



a) Mivel  $AC = 10$ ,  $BC = 3\sqrt{10}$ ,  $AB = \sqrt{10}$ , azért a háromszög kerülete:  $k = 10 + 4\sqrt{10} \approx 22,65$  (egység).

Ezek a pontok egy derékszögű háromszöget határoznak meg, hiszen  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . A háromszög területe:

$$t = \frac{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 15 \text{ (területegység)}.$$

b) A keresett kör középpontja az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AC$  átfogójának felezőpontja:  $F(-1; -2)$ . Mivel a feladatban megadott körök mindegyikének 2 a sugara, azért a keresett kör sugara 2 egységgel nagyobb, mint az  $ABC$  háromszög köré írt kör sugara.  $FA = 5$ , tehát a keresett kör sugara 7. A kör egyenlete:  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 49$ .

8. András és Béla nagyon sokat asztaliteniszeznek egymással. A tapasztalat azt mutatja, hogy András 0,7, Béla 0,3 valószínűséggel nyer meg egy játékot. Ha többször játszanak, akkor azt tekintjük győztesnek, aki többször nyert.

a) Mekkora András nyerési esélye, ha négyszer játszanak?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Béla minden játékot megnyer, ha háromszor játszanak?

c) Hogyan változott András egy játékának nyerési esélye, ha két játék esetén Béla  $\frac{5}{9}$  valószínűséggel nem veszít? (16 pont)

**Megoldás.** a) András nyerhetett három vagy négy játékot a négyből, vagyis a nyerési esélye:

$$\binom{4}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^0 = 0,4116 + 0,2401 = 0,6517.$$

b)

$$\binom{3}{0} \cdot 0,7^0 \cdot 0,3^3 = 0,027.$$

c) Ha András  $p$  valószínűséggel nyer meg egy játékot, akkor annak a valószínűsége, hogy Béla két játékot lejátszva nem veszít:

$$\binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^2 + \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^1 = \frac{5}{9}.$$

Rendezve:  $1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 = \frac{5}{9}$ , amiből a  $p^2 = \frac{4}{9}$ , azaz  $p = \frac{2}{3}$  ( $p > 0$ ).

András nyerési esélye csökkent: 0,7 helyett 0,67 lett.

**9.** *Igazoljuk, hogy a  $2^n \cdot n! < (n+1)^n$  egyenlőtlenség minden 1-nél nagyobb természetes szám esetén fennáll. (16 pont)*

**Megoldás.** Mindkét oldal pozitív, így vehetjük az  $n$ -edik gyöküket:

$$2 \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < n+1, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{n+1}{2}.$$

Mivel

$$\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n} = \frac{1+2+\dots+n}{n},$$

azért az egyenlőtlenséget így is írhatjuk:  $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1+2+\dots+n}{n}$ . Ez viszont nyilvánvalóan igaz, mert a két oldalon az  $1, 2, \dots, n$  számok mértani, illetve számtani közepe áll.