

## 1. Komplex számok, mint valós elemű mátrixok

A cikk első részében megmutattuk, hogy adott  $\mathbf{K}$  test esetén tetszőleges  $\mathbf{K}$ -beli együtthatós és felette irreducibilis  $n$ -edfokú  $f(x)$  polinomhoz található olyan  $n \times n$ -es  $A$  mátrix, amely az  $f(x)$ -nek gyöke. (A skalár együtthatók helyébe a megfelelő skalármátrixokat kell írni!) Az is igaz, hogy  $A$ -nak a  $\mathbf{K}$ -beli együtthatós polinomjai testet alkotnak, és e test minden eleme egyértelműen írható fel, mint  $A$ -nak legfeljebb  $(n-1)$ -edfokú polinomja.

A továbbiakban azt az esetet nézzük, amikor a kiinduló test a valós számok  $\mathbf{V}$  teste. Ez a test (amit a számegyenesen szoktunk ábrázolni) a következő jellemző tulajdonságokkal rendelkezik (a szóbanforgó elemek mind  $\mathbf{V}$ -beliek):

- (1) Minden  $a, b$  elemhez van olyan  $c$ , amire  $c^2 = a^2 + b^2$ .
- (2) Ha az  $a$  elemhez nincs olyan  $b$ , amire  $a = b^2$ , akkor van olyan  $c$ , amire  $a = -c^2$ .
- (3)  $a = b^2 = -c^2$  pontosan az  $a = 0$  esetben lehet.
- (4) Tetszőleges valós együtthatós páratlan fokú (normált) polinomnak van valós gyöke.
- (5) Minden valós együtthatós (normált) polinom felbontható legfeljebb másodfokú polinomok szorzatára.

Annak a bizonyítása, hogy a valós számtest rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, felhasználja (4)-nél a folytonosságot. Ezen kívül van még nagyon sok test, ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal. Valójában az (5) tulajdonság következik a többiből, de a „trükkös” bizonyításhoz sok, viszonylag bonyolult algebrai összefüggést kell ismerni. Mindenesetre világos, hogy az  $a^2$  alakú elemek pozitívak, illetve ezeket „tekinthetjük” pozitívnak ( $a \neq 0$ ).

A  $\mathbf{V}$  valós test esetében (5) miatt egy irreducibilis polinom legfeljebb másodfokú. Elsőfokú polinomnak természetesen van gyöke  $\mathbf{V}$ -ben (ez a gyök persze egyértelmű). De van olyan másodfokú polinom, amelynek nincs valós gyöke. Ilyen például az  $x^2 + 1$ , mert ha ennek az  $a$  valós szám gyöke lenne, akkor az  $a^2 = -1 = -1^2$  összefüggésből (3) szerint  $1 = 0$  következne, ami nem igaz.

Az  $x^2 + 1$  polinom (valamelyik) gyökét  $i$ -vel jelölik, és képzetes egységnek nevezik. A másik gyök persze  $-i$ . Közöttük algebrai szempontból nincs különbség.

A valós számok felsorolt tulajdonságaiból könnyen kaphatjuk, hogy bármely másodfokú, valós együtthatós polinomnak van  $a + bi$  alakú, úgynevezett *komplex szám* gyöke. Ugyanennek a polinomnak van egy másik gyöke is, az  $a - bi$ . Az ilyen alakú párokat egymás konjugáltjának nevezzük.

A komplex számokról a következőket tudjuk:

A komplex számok testet alkotnak. Minden komplex szám egyértelműen felírható  $a + bi$  alakba, ahol  $a, b$  valós számok és  $i^2 = -1^2$ .

Összeadásuk és szorzásuk a következőképpen végezhető:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad \text{és} \quad (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Az  $\alpha = a + bi$  és  $\bar{\alpha} = a - bi$  konjugáltak szorzata  $a^2 + b^2$  pozitív, ha  $\alpha \neq 0$ , ennek (pozitív) négyzetgyöke az  $\alpha$  abszolút értéke (a megfelelő vektor hossza):

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}.$$

Minden komplex együtthatós normált polinomnak van komplex gyöke, ezért annyi elsőfokú polinom szorzatára bontható, amennyi a foka.

Cikkünk első részében a gyököket „mátrixalakban” adtuk meg. Így az  $x^2 + 1$  (valós) polinom gyöke a  $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  mátrix. Négyzetre emelve azt kapjuk, hogy  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , ami valóban a  $(-1)$ -nek megfelelő skalármátrix. Ennek alapján az  $a + bi$  komplex számnak az  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  felel meg.

## 2. Komplex számok a síkgeometriában

<sup>1</sup>Köszönet illeti a T043034 és T043671 OTKA támogatását.

<sup>2</sup>Tudatosan nem használtuk a  $\sqrt{-1}$  jelölést, mert ezzel mintegy kitüntetnénk a két gyök valamelyikét.

Az első részben említettük, hogy a mátrixok homogén lineáris transzformációkat írnak le. Mindenekelőtt felhívjuk a figyelmet arra, hogy különböző méretű mátrixok is összeszorozhatók, ha nem négyzetesek. A „szorzási eljárás” elvégzéséhez az szükséges, hogy az első mátrix oszlopainak a száma megegyezzen a második mátrix sorainak a számával. Mielőtt erre példát mutatnánk előrebozsátjuk a következőket.

Az origóból a sík  $(x; y)$  koordinátájú pontjába mutató  $\mathbf{v}$  vektort a  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  mátrixszal adjuk meg. Ezt az  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  mátrixszal (balról) szorozva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Eredményünket úgy értelmezhetjük, hogy a fenti mátrixszal jellemzett  $\varphi$  (homogén lineáris) transzformáció a  $\mathbf{v}$  vektort az  $(ax + by; cx + dy)$  koordinátájú pontba mutató  $\varphi(\mathbf{v})$  vektorba viszi át.

*Megjegyzés.* Érdemes meggondolni az alábbiakat:

1. Legyen  $\mathbf{e}$  az  $(1; 0)$  és  $\mathbf{f}$  a  $(0; 1)$  koordinátájú pontba mutató vektor. Hova mutat  $\varphi(\mathbf{e})$  és  $\varphi(\mathbf{f})$ ? És  $\varphi(\mathbf{v})$ ?
2. Ha  $\varepsilon$  az  $E$  mátrixszal jellemzett függvény, akkor világos, hogy mi lesz  $\varepsilon(\mathbf{v})$ . De mi lesz  $\alpha(\mathbf{v})$ , ha  $\alpha$  „mátrixa”  $I$ ? Értelmezzük ezt geometriailag.
3. Milyen alakú az  $aE + bI$  mátrix? És az  $aE - bI$ ? Milyen alakú ezek szorzata? Mutassuk meg, hogy ha  $a\varepsilon + b\alpha$  egyetlen nem nulla vektort is nullába visz, akkor minden vektort 0-ba visz.
4. Milyen alakú az  $aE + bI$  mátrix, ha  $a^2 + b^2 = 1$ ? Ekkor mi lesz  $a\varepsilon + b\alpha$  hatása?
5. „Olvassuk le”  $a\varepsilon + b\alpha$  hatását általában.

Az eddigi eredményeket úgy foghatjuk fel, hogy a valós számok ismeretében megalkottuk a komplex számokat – pontosabban szólva egy *modell*t alkottunk a komplex számokra, egy olyan testet, amely úgy viselkedik, ahogy a komplex számoktól<sup>3</sup> „elvárjuk”.

### 3. Kvaterniók

Az algebra alaptétele szerint minden komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke. (Mi ugyan nem ebben az alakban adtuk meg, de könnyen látható, hogy ez ugyanazt jelenti.) Vegyük most a  $2 \times 2$ -es alakú mátrixok elemeit a komplex számok  $\mathbf{C}$  testéből. Mivel az  $x^2 + 1$  polinomnak van gyöke, azért ha a  $J$  mátrixot  $\mathbf{C}$  feletti mátrixnak fogjuk fel, akkor az  $\alpha E + \beta J$  ( $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ) alakú mátrixok nem alkotnak testet. Ugyanis az  $(\alpha E + \beta J)(\alpha E - \beta J) = (\alpha^2 + \beta^2)E$  szorzat  $O$  lesz, ha  $\beta = i\alpha$ , noha egyik tényező sem 0. Ezekkel tehát nem lehet osztani (mint az I. részben láttuk).

Igaz, hogy két komplex szám négyzetösszege lehet 0, de normájuk összege  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}$  csak akkor, ha  $\alpha = \beta = 0$ . Kiséreljük meg az egyik tényezőt „átváltani” a konjugáltjára!

A szóhajóvő mátrix  $\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ . Kézenfekvő megoldás, hogy a második sorban minden elem helyébe a konjugáltját írjuk:  $\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ .

Az világos, hogy két ilyen alakú mátrix összege is ilyen alakú. A szorzat esetében ezt ellenőrizni kell:

$$\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma - \delta \\ \bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} - \alpha\delta - \beta\bar{\gamma} \\ \beta\gamma + \bar{\alpha}\bar{\delta} - \beta\delta + \bar{\alpha}\bar{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Eszerint az adott alakú mátrixok gyűrűt alkotnak, mert a figyelembe veendő azonosságok mind teljesülnek – kivéve persze a szorzat kommutativitását. Attól eltekintve, hogy ez – az előzőekben megállapítottak következtében – nem is lehetne igaz, lássuk be. Ahelyett, hogy ezt „általában” bizonyítanánk, elég egy ellenpéldát adni. Az alábbi ellenpéldára a későbbiekben szükségünk is lesz. Legyen

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor ezek szorzata

$$K = IJ = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{míg} \quad JI = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -K.$$

Ennek ellenére elképzelhető, hogy a fenti alakú mátrixok körében elvégezhető az osztás. Természetesen itt beszélhetünk „balosztásról” és „jobbosztásról” is. Ez azt jelenti, hogy adott  $A \neq O$  és  $B$  elemhez keresünk olyan hasonló alakú  $X$  és  $Y$  mátrixokat, amelyekre  $XA = AY = B$ . Tekintettel arra, hogy az  $E$  egységmátrix minden mátrixszal felcserélhető, elegendő a  $B = E$  eset vizsgálata. Ha viszont minden  $A \neq O$  mátrixhoz van olyan  $X$ , amelyre  $XA = E$ , akkor  $X \neq O$ , tehát van olyan  $Z$ , hogy  $ZX = E$ ; így:

$$AX = E(AX) = (ZX)(AX) = Z(X(AX)) = Z((XA)X) = Z(EX) = ZX = E.$$

<sup>3</sup> A modellalkotásnak az a haszna – jelen esetben –, hogy ha a valós számok körében nincs ellentmondás (ezt nem tudjuk!), akkor a komplex számok körében sincs.

Eszerint  $AX = E$  is igaz. Természetesen  $AY = E$  esetén  $YA = E$  is teljesül. Elég tehát az „egyik oldali” osztással foglalkozni. Keresünk tehát adott  $U = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$  mátrixhoz olyan (hasonló alakú)  $V$  mátrixot, amelyre  $UV = E$ .

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a következőket jelenti: Adott  $\alpha$  és  $\beta$  komplex számokhoz (amelyek nem mindketten egyenlők 0-val) olyan  $\gamma$  és  $\delta$  komplex számokat keresünk, amelyekre  $\alpha\delta + \beta\bar{\gamma} = 0$  és  $\bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}\delta = 1$  teljesül. Az első egyenlőséget  $\bar{\beta}$ -tal, a másodikat  $\alpha$ -val szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy  $(\beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha})\bar{\gamma} = 1$ . Mivel a bal oldalon levő első tényező nem 0,  $\gamma$  és (analog módon)  $\delta$  is meghatározható. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a kapott két elem teljesíti a kirótt feltételt.

Beláttuk tehát, hogy az  $\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$  alakú komplex elemű mátrixok halmaza az összeadás és szorzás (mátrix)műveletekre majdnem úgy viselkedik mint egy test, csupán a szorzás kommutativitása hiányzik. Ilyen esetekben *ferdetestről* beszélünk. Ma már az algebra sok ágában ezek nagyon fontosak. Ezért ezeket nevezik *testnek*, és ha a szorzás kommutatív, akkor *kommutatív testről* beszélünk. Mi itt az előbbi elnevezést vesszük figyelembe.

Az  $\alpha = a + bi$  és  $\beta = c + di$  felírással ( $a, b, c, d$  valós számok) azt kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezt az összeget az  $E, I, J, K$  mátrixjelöléssel a következőképpen írhatjuk fel:

$$aE + bI + cJ + dK.$$

**Elnevezés.** Az  $aE + bI + cJ + dK$  alakú kifejezéseket **kvaternióknak** nevezzük ( $a, b, c, d$  valós számok). A kvaterniók összeadása komponensenként történik. A valós számokkal való szorzás is komponensenként történik, és a kvaterniókkal felcserélhető. A kvaterniók szorzása az asszociativitás és (mindkét oldali!) disztributivitás felhasználásával és a következő összefüggések segítségével végezhető el:

- (1)  $EE = E, EI = IE = I, EJ = JE = J, EK = KE = K$ ;
- (2)  $II = JJ = KK = -E$ ;
- (3)  $IJ = K, JK = I, KI = J$  és  $JI = -K, KJ = -I, IK = -J$ .

A kvaterniók a fenti műveletekre nézve ferdetestet alkotnak, amelynek a neve kvaterniótest. Az  $I, J, K$  elemeket kvaternióegységeknak nevezik.

*Megjegyzések.* 1. Az (1) és (2) alapján (3) helyettesíthető az  $IJK = -E$  összefüggéssel.

2. A (3) alatti összefüggések könnyebben megjegyezhetők a következő módon: Az  $I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow I$  felsorolásban két egymás utáninak a szorzata a harmadik, ha a „nyíl irányában” szorzunk, míg ellenkező irányú szorzásnál a harmadik negatívját kapjuk.

3. A kvaterniókat és a kvaternióegységeket írhatjuk valós elemű mátrixokként is. Gondoljuk meg, hogy a komplex számokhoz  $2 \times 2$ -es valós mátrixokon keresztül jutottunk el. Helyettesítsük tehát az  $E, I, J, K$  mátrixok  $0, 1, i$  elemeit rendre a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

mátrixokkal. Ilyen módon a kvaterniókat valós elemű mátrixokkal ábrázoltuk; igaz, ezek  $4 \times 4$ -es mátrixok. (Számoljuk ki!)

A kvaterniókat általában nem mátrixalakban szokták megadni, hanem a következőképpen:  $a + bi + cj + dk$  (az  $a1$  kifejezés helyett  $a$  szerepel, hiszen bármely  $x$  kvaternióra  $1x = x1 = x$ ). Ezt a „szokást” mi is át vesszük, azzal az eltéréssel, hogy a kvaternióegységeket vastagított betűvel jelöljük, vagyis a kvaternió az  $a + \mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$  alakot ölti.

*Megjegyzés.* Az  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$  összefüggés azt mutatja, hogy a kvaterniók körében az  $x^2 + 1$  polinomnak több mint kettő gyöke van (itt még csak hatot látunk). Ennek nem lehet az az oka, hogy két nemnulla elemnek a szorzata 0 volna, hiszen ez ferdetestben nem fordulhat elő. Az ok csak a kommutativitás hiánya lehet. Ha a polinomokat  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  alakban akarjuk tekinteni, akkor a műveletek elvégezhetősége érdekében vigyázni kell a szorzásnál abban az esetben, amikor az együtthatók szorzása nem kommutatív. Ugyanis az  $xa$  kifejezés nem polinom! Ezen úgy segítenek, hogy a határozatlan az együtthatókkal felcserélhetőnek tekintik. Ezért  $x^2 + 1 = (x + \mathbf{i})(x - \mathbf{i})$ , hiszen  $x(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{i})x$ . Ha itt  $x$  helyébe  $\mathbf{j} + \mathbf{i}$  írunk, akkor a bal oldalon 0, a jobb oldalon viszont  $(\mathbf{j} + \mathbf{i})(\mathbf{j} + \mathbf{i}) = -1 + \mathbf{k} - (-\mathbf{k}) - (-1) = 2\mathbf{k}$  adódik. Ez azt is jelenti, hogy esetünkben a polinomoknál *a szorzat helyettesítési értéke nem mindig egyezik meg a helyettesítési értékek szorzatával.*

Az  $a + \mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$  felírással az is célunk volt, hogy megmutassuk, egy kvaternió két részből áll: az  $a$  *skalárból* és a  $\mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$  úgynevezett *tiszta kvaternióból*. A tiszta kvaterniók pontosan megfelelnek a tervektoroknak, ahol  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  a koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektorok. Az világos, hogy tiszta kvaterniók összege pontosan a vektorösszeghez tartozó tiszta kvaterniónak felel meg. A szorzat viszont érdekesebbnek bizonyulhat.

Legyen  $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  és  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  két tiszta kvaternió. Ezek szorzata kilenc tagból áll. E tagokat összevonva a következőket kapjuk:

$$\mathbf{uv} = -(ax + by + cv) + (bz - cy)\mathbf{i} + (cx - az)\mathbf{j} + (ay - bx)\mathbf{k}.$$

Ha fordított sorrendben végezzük el a szorzást, akkor

$$\mathbf{vu} = -(ax + by + cv) - [(bz - cy)\mathbf{i} + (cx - az)\mathbf{j} + (ay - bx)\mathbf{k}]$$

adódik. A szorzatoknak mind a valós része, mind a tiszta kvaternió része fontos szerepet játszik a matematika különböző ágaiban. Ezeket, megfelelően  $(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ , illetve  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  (vagy  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ ) jelöli. Az elsőnek a neve *skaláris vagy belső szorzat*, a másodiké *vektoriális vagy külső szorzat*. Ezeket formálisan is könnyen megkaphatjuk a tiszta kvaterniók segítségével:

$$(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}) \text{ és } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}).$$

*Megjegyzések.* 1. Két vektor skaláris szorzatát geometriailag úgy kaphatjuk meg, hogy összeszorozzuk hosszukat, és az általuk közbezárt szög koszinuszát. A vektoriális szorzat egy olyan vektor, amely merőleges a két adott vektor síkjára (ha azok párhuzamosak, akkor a vektoriális szorzat 0), hossza a két vektor hosszának és a közbezárt szög szinuszának a szorzata, és iránya olyan, hogy belőle nézve az első vektort a második irányába forgató szög pozitív.

2. A fenti összefüggés lehetővé teszi, hogy két vektor szögének szögfüggvényeit a vektorok koordinátáiból kiszámítsuk anélkül, hogy a szöget ismernénk.

3. A felírt összefüggésből mindkét szorzatnak számos tulajdonsága leolvasható. Mint például az, hogy mindkettő disztributív az összeadásra nézve, a skaláris szorzat *szimmetrikus*, a vektoriális szorzat *antiszimmetrikus* (mit is jelenthet ez a szó?) stb.

Ha a tiszta kvaterniók szorzatánál a tényezők megegyeznek, akkor azt kapjuk, hogy  $\mathbf{uu} = -(a^2 + b^2 + c^2)$ . Ha a megfelelő vektor az origóból az egységsugarú gömb felületére mutat, akkor ez a kvaternió gyöke az  $x^2 + 1$  polinomnak. A kvaterniók körében tehát egy másodfokú egész együtthatós polinomnak végtelen sok gyöke is lehet. (Aki ismer valamennyi halmazelméletet, az láthatja, hogy a gyökök „kontinuumnyi sokan” vannak.)

## 4. Hamilton-tól Einstein-ig

A kvaterniókat *W. R. Hamilton* vezette be 1843-ban. Célja az volt, hogy térvektorokat „oszthasson”<sup>4</sup>.

Egy kvaternió – mint tudjuk – két részből áll, egy valós részből és egy tiszta kvaternióból. A tiszta kvaterniónak megfeleltethetjük a háromdimenziós tér egy pontját, de mit tegyünk a skalárral? Az előbbieken alapján világos, hogy egy tiszta kvaternió négyzete egy negatív skalár, a skalárok négyzete pedig egy pozitív skalár. Ezek valahogy „ellentétesen viselkednek”. 1908-ban *H. Minkowski* egy olyan négydimenziós teret (ez négy koordinátát jelent) vezetett be, amely ehhez van igazítva. Nevezetesen felhasználható a *Lorentz-transzformáció* „leírásához”. Itt a valós tengely felel meg az időtengelynek, mert az idő másképpen viselkedik, mint a tér. Ezzel az ábrázolásmóddal nagymértékben elősegítette az *Einstein*-féle speciális relativitáselmélet megértését.

Ha korlátozzuk magunkat az idővel és figyelembe vesszük, hogy az idő egy irányba változhat és feltesszük, hogy a „Nagy Bumm” idején van az időskála 0-pontja, akkor a koordinátarendszerben a „helyeket” gömbökkel ábrázolhatjuk. Ha az  $\mathbf{u}$  pontot akarjuk a (Nagy Bummtól számított)  $t$  időben ábrázolni, ezt úgy tehetjük meg, hogy megnézzük, hova mozdult el a pont  $t$  idő után. Ha ez a  $\mathbf{v}$  pont, akkor egy  $t$  sugarú  $\mathbf{v}$  középpontú gömböt veszünk fel. (Ha volna idő a Nagy Bumm előtt, ezt képzetes gömb ábrázolná – bármi is az.)

<sup>4</sup>Ezt a tényt kedves volt tanítványom, *Pelikán József* mesélte el a következő szavak kíséretében: „Ha az ember valamit meg akar érteni, akkor vissza kell menni az eredetéhez”. Ő ugyanis elolvasta Hamilton eredeti munkáját. Ő ugyanaz a matematikus, aki hosszú évek óta vezet a magyar csapatot a matematikai diákolimpiákon, és jelenleg is az olimpiai bizottság tagja.