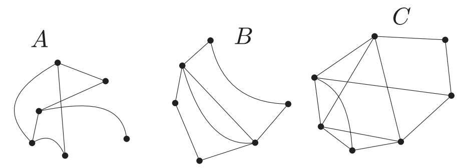
I. rész

1. *a) A gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazó vonalat Euler-vonalnak, az olyan Euler-vonalat, amelynek a kezdő és a végpontja egybeesik, Euler-körnek nevezzük. Az* ábrán *látható három gráf közül mely gráfoknak van Euler-vonala, illetve Euler-köre?*



b) Milyen számjegyeket helyettesíthetnek a betűk, ha R = 0, *különböző betűk különböző számokat jelölnek és az összeadás természetesen helyes eredményt ad?*

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{O} & \mathrm{R} & \mathrm{O} & \mathrm{L} \\ + & & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{O} \\ \hline & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{R} & \mathrm{A} \end{array}$$

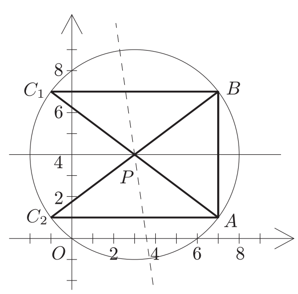
Megoldás. *a)* Euler-vonala a B és C gráfoknak, Euler-köre csak a B gráfnak van.

b) Ha $\mathrm{R} = 0$, akkor a második oszlopot vizsgálva, vagy $\mathrm{R} + \mathrm{A} = \mathrm{R}$ és $\mathrm{A} = 0$, de ez nem lehet, mert különböző betűk különböző számokat jelölnek, vagy $\mathrm{R} + \mathrm{A} + 1 = \mathrm{R} + 10$, ami azt jelenti, hogy $\mathrm{A} = 9$. Ekkor viszont az első oszlopot nézve $\mathrm{O} + 1 = 9$, tehát $\mathrm{O} = 8$. Ebből adódóan az utolsó oszlopban $\mathrm{L} + 8 = 9$ (más eset nincs), tehát $\mathrm{L} = 1$. Végül könnyen látható, hogy $\mathrm{M} = 2$. Vagyis:

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 0 & 8 & 1 \\ + & & 9 & 2 & 8 \\ \hline & 9 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

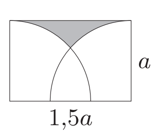
2. *Egy derékszögű háromszög két csúcsa $A(7;1)$, $B(7;7)$. Hol lehet a háromszög harmadik csúcsa, ha körülírt köre áthalad az origón? Írjuk fel ennek a körnek az egyenletét.*

Megoldás. Az AB szakasz felező merőlegesének egyenlete: $y = 4$.



Az OA szakasz felező merőlegesének egyenlete: $7x + y = 25$.
Metszéspontjuk, vagyis a köré írt kör középpontja: $P(3;4)$.
A P pont nem illeszkedik az AB szakaszra, az tehát nem átmérő.
A C pontok az A-nak és a B-nek a P-re vonatkozó tükörképei: $C_1(-1;7)$, $C_2(-1;1)$.
A kör sugara $OP = 5$, a kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

3. *Az* ábrán *látható téglalap oldalai a és* 1,5*a. Mekkora az a sugarú negyedkörlapok által fedetlenül hagyott (az ábrán sötétre színezett) terület nagysága?*

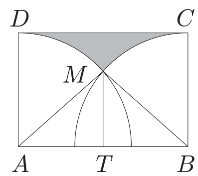


Megoldás. Tudjuk, hogy $AD = a$, és $AB = 1{,}5a$, tehát $AT = 0{,}75a$, $AM = a$. Az MAT háromszögből a koszinusz szögfüggvény segítségével $MAT \approx 41{,}4°$. Ebből adódóan $MAD \approx 48{,}6°$. Az MAT háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével: $MT \approx 0{,}6614a$.

$$T_{DMC} = T_{ABCD} - T_{AMB} - 2 \cdot T_{AMD}.$$

$$T_{ABCD} = 1{,}5a^2, \quad T_{AMB} = \frac{AB \cdot MT}{2} \approx 0{,}4961a^2,$$

$$2 \cdot T_{AMD} = 2 \cdot \frac{48{,}6}{360} \cdot a^2\pi \approx 0{,}8482a^2, \qquad T_{DMC} \approx 0{,}1557a^2.$$



4. *Sík terepen A és B megközelíthetetlen tereppontok távolságát kell meghatároznunk. Ezért kitűzünk egy C pontot, ahonnan a keresett távolságot $60°$-os szög alatt látjuk. A $60°$-os szög felező egyenesén 50 m-t megtéve, az AB szakasztól távolodva a D pontba jutunk. Innen az A pontba mutató irány $20°$-os szöget, a B pontba mutató irány $10°$-os szöget alkot az általunk megtett útszakasszal. Mekkora az AB távolság?*

Megoldás. Az $ACD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 150°$, mivel kiegészítő szögeik $30°$-osak. Ebből adódóan $CAD\sphericalangle = 10°$ és $CBD\sphericalangle = 20°$.

Az ACD háromszögben szinusztétellel: $AD \approx 143{,}97$ m.

A BCD háromszögben szinusztétellel: $BD \approx 73{,}10$ m.

Az ABD háromszögben koszinusztétellel: $AB \approx 88{,}56$ m.

II. rész

5. *a) Rendezzük nagyság szerint növekedő sorrendbe azokat a k számokat, amelyekre teljesül, hogy*

$$7 \mid k^3 + 9k^2 + 23k + 15.$$

Mennyi az így kapott sorozat első 100 elemének az összege?

b) Legyen $a > 1$. Határozzuk meg a következő kifejezés értékét: $a^{\frac{\lg a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}}{\lg a}}$.

Megoldás. *a)* A $k^3 + 9k^2 + 23k + 15$ polinomot megvizsgálva látható, hogy $k = -1$ gyöke. A $k + 1$ polinommal elosztva a $k^2 + 8k + 15$ polinom adódik, amely felírható $(k+3)(k+5)$ alakban. A $k^3 + 9k^2 + 23k + 15$ polinom tehát átírható $(k+1)(k+3)(k+5)$ alakúra.

Ha az eredeti kifejezés osztható 7-tel, akkor

$$\begin{array}{lll} k+1 = 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \ldots & \text{vagyis} & k = 6,\ 13,\ 20,\ 27,\ \ldots \quad \text{vagy} \\ k+3 = 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \ldots & \text{vagyis} & k = 4,\ 11,\ 18,\ 25,\ \ldots \quad \text{vagy} \\ k+5 = 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \ldots & \text{vagyis} & k = 2,\ 9,\ 16,\ 23,\ \ldots. \end{array}$$

A keresett összeg a számtani sorozat összegképlete alapján határozható meg:

$$\frac{2\cdot 6 + 32\cdot 7}{2}\cdot 33 + \frac{2\cdot 4 + 32\cdot 7}{2}\cdot 33 + \frac{2\cdot 2 + 33\cdot 7}{2}\cdot 34 = 3894 + 3828 + 3995 = 11\,717.$$

b) Vizsgáljuk meg először $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$ kifejezés értékét $a > 1$ esetén: $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = x$.

Vehetjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, hiszen egy pozitív valós szám hatványa csak pozitív lehet: $\lg a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = \lg x$, $\dfrac{\lg(\lg a)}{\lg a}\lg a = \lg x$, $\lg(\lg a) = \lg x$, a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű: $\lg a = x$.

Most meg kell határozni az $a^{\frac{\lg x}{\lg a}}$ értékét. Behelyettesítve x értékét: $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$ adódik, amiről már tudjuk, hogy $\lg a$.

6. *Egy dobozban 4 piros és 2 sárga golyó van. Visszatevés nélkül húzunk addig, amíg az első sárga golyót kihúzzuk. A kísérlet kimenetele az ehhez szükséges húzások száma. Ábrázoljuk az így definiált valószínűségi változó eloszlását, illetve számoljuk ki a várható értékét.*

Megoldás. Jelölje az első sárga húzás sorszámát x, ennek valószínűségét pedig $P(x)$.

$$P(1) = \frac{2}{6} = \frac{5}{15},$$

$$P(2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

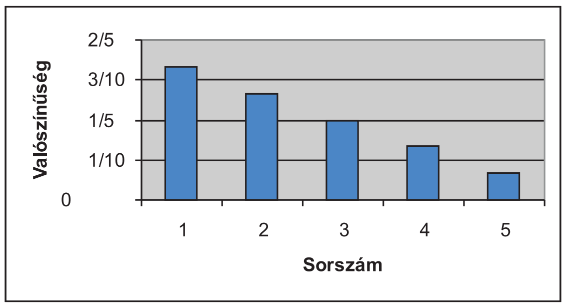
$$P(3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{15},$$

$$P(4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15},$$

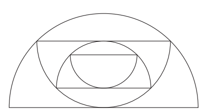
$$P(5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

A várható érték:

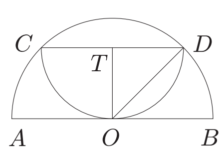
$$E(x) = 1 \cdot \frac{5}{15} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}.$$



7. *Az* 1 dm *átmérőjű félkörbe az ábrán látható módon újabb félköröket írunk. Mennyi a második félkör területe és kerülete? Milyen sorozatot határoznak meg a félkörök kerületei és területei? Véges értéket kapunk-e, ha összeadjuk az így keletkeztetett végtelen sok félkör területét? Ha igen, akkor mennyi ez az összeg?*



Megoldás. Legyen $OB = OD = r_0$ és $TD = TO = r_1$. A további beírt félkörök sugarának jelölése: $r_2, r_3, r_4, \dots$ legyen. TDO háromszögből Pitagorasz tételével $r_1 = r_0\frac{\sqrt{2}}{2}$, hasonlóan az i-edik félkörre $r_i = r_{i-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.



A második félkör kerülete: $K_1 = 2r_1 + r_1\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

A második félkör területe:

$$T_1 = \frac{r_1^2\pi}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

A kerületek mértani sorozatot alkotnak, ahol $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($K_i = \frac{\sqrt{2}}{2}K_{i-1}$ könnyen belátható). A területek mértani sorozatot alkotnak, ahol $q = \frac{1}{2}$ ($T_i = \frac{1}{2}T_{i-1}$, ez könnyen belátható). A területek sorozatából képzett mértani sor konvergens, hiszen $q = 0{,}5$, tehát véges a területek összege.

$$S = \frac{T_0}{1-q} = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi}{4}.$$

8. *Tekintsük a valós számokon értelmezett következő függvényt:*

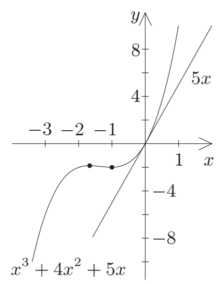
$$x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5x.$$

a) Határozzuk meg a függvény zérushelyeit.
b) Van-e a függvénynek lokális szélsőértéke? Ha van, akkor határozzuk meg.
c) Jellemezzük a függvényt növekedés és fogyás szempontjából.
d) Van-e a függvénynek inflexiós pontja? Ha van, akkor határozzuk meg.
e) Írjuk fel a függvény érintőjének egyenletét a 0 abszcisszájú pontjában.

Megoldás. *a)* A függvény zérushelyeit az $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$ egyenlet megoldása adja. Szorzattá alakítva a bal oldalt az $x(x^2 + 4x + 5)$ alakot kapjuk. A zérushelyre csak az $x = 0$ adódik.

b)–c) A függvény deriváltja: $f' = 3x^2 + 8x + 5$, ennek zérushelyei $x_1 = -\dfrac{10}{6}$ és $x_2 = -1$.

	$x < -\frac{10}{6}$	$x = -\frac{10}{6}$	$-\frac{10}{6} < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x$
f	nő	maximum	csökken	minimum	nő
f'	+	0	−	0	+



A táblázatból látható, hogy $M_1\left(-\dfrac{10}{6}; -\dfrac{50}{27}\right)$ lokális maximum, az $M_2(-1; -2)$ lokális minimum.

d) A függvény második deriváltja $f'' = 6x + 8$, ennek zérushelye $x = -\dfrac{4}{3}$.

	$x < -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < x$
f	konkáv	Inflexiós pont	konvex
f''	−	0	+

e) Mivel $x = 0$ zérushely, ezért a függvény képe az origón, tehát a $P_0(0; 0)$ ponton halad át. Az érintő iránytangensét $f'(0) = 5$ adja. Az érintő egyenlete: $y = 5x$.

9. *A* táblázat *nyolc ország adatait tartalmazza.*
a) Állítsuk növekvő sorrendbe az egyes országokat népsűrűség szerint.
b) Melyik országban a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy egy állampolgár fővárosi?
c) Hányféleképpen tudunk kiválasztani az itt felsorolt országok közül négyet úgy, hogy pontosan két európai és pontosan két ázsiai legyen köztük?
d) Tekintsük ezen országok lakosságát egy számsokaság elemeinek. Mennyi ennek a számsokaságnak a terjedelme és az átlaga?

Ország	Terület (km^2)	Lakosok száma (fő)	Főváros	Főváros lakossága (fő)
Ausztrália	7 682 300	17 483 000	Canberra	197 000
Banglades	147 570	111 400 000	Dhaka	3 683 000
Hollandia	33 939	15 298 000	Amszterdam	720 000
India	3 287 263	846 303 000	Új Delhi	273 000
Kína	9 608 378	1 198 340 000	Peking	7 000 000
Magyarország	93 036	10 310 000	Budapest	1 992 000
Málta	316	362 000	Valletta	9210
Mongólia	1 565 500	2 250 000	Ulánbátor	619 000

Megoldás. *a*) Az országok sorrendje népsűrűség (fő/km^2) szerint Mongólia (1,44); Ausztrália (2,276); Magyarország (110,82); Kína (124,72); India (257,45); Hollandia (450,75); Banglades (754,896); Málta (1145,57).

b) Mongólia (27,51%).

c) $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} =$ 18-féleképpen.

d) Terjedelem: 1 198 340 000 − 362 000 = 1 197 978 000. Az átlag: 275 218 250.