I. rész

1. Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós gyöke:

$$\sqrt{x^2-2005x-2006}+\sqrt{x^2-2007x+2006}+\sqrt{x^2-k^2}=0. \qquad (11\ pont)$$

2. Egy mértani sorozat három egymást követő tagja közül a harmadik -2. Ha ezt az első kettő elé rakjuk, akkor egy számtani sorozat egymást követő három tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot. *(12 pont)*

3. Adjuk meg a következő összeget tized pontossággal:

$$\lg\left(7\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\lg\left(7^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\lg\left(7^3\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\right)+\ldots+\lg\left(7^{999}\cdot\sqrt{\frac{999}{1000}}\right). \qquad (14\ pont)$$

4. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja 56 cm, a szárai 53 cm hosszúak. Tudjuk, hogy az AB alap F felezőpontja, a beírt körének az O középpontja, a köré írt körének a K középpontja, az S súlypontja, az M magasságpontja és a C csúcspontja egy egyenesen vannak.

a) Hány háromszöget határoznak meg az F, O, K, S, M, C és A pontok?

b) Számítsuk ki az ASK háromszög területét.

c) Számítsuk ki az FO hosszát. *(14 pont)*

II. rész

5. Ha a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $f(x)=3|x|$ és $g(x)=x^2$ hozzárendelésű függvények görbéjét az y tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár alakú testet kapunk. Adjuk meg a két pohár térfogatának eltérését deciliterben, ha a koordinátarendszer egysége 1,5 cm. *(16 pont)*

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}}=24{,}2. \qquad (16\ pont)$$

7. Adott három kör az egyenletével:

$$x^2+8x+y^2-4y+16=0,$$
$$x^2+2x+y^2-6y+6=0,$$
$$x^2-4x+y^2+12y+36=0.$$

a) Számítsuk ki a középpontjaik által meghatározott háromszög kerületét és területét.

b) Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az adott körök belülről érintenek. *(16 pont)*

8. András és Béla nagyon sokat asztaliteniszeznek egymással. A tapasztalat azt mutatja, hogy András 0,7, Béla 0,3 valószínűséggel nyer meg egy játékot. Ha többször játszanak, akkor azt tekintjük győztesnek, aki többször nyert.

a) Mekkora András nyerési esélye, ha négyszer játszanak?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Béla minden játékot megnyer, ha háromszor játszanak?

c) Hogyan változott András egy játékának nyerési esélye, ha két játék esetén Béla $\frac{5}{9}$ valószínűséggel nem veszít? *(16 pont)*

9. Igazoljuk, hogy a $2^n\cdot n!<(n+1)^n$ egyenlőtlenség minden 1-nél nagyobb természetes szám esetén fennáll. *(16 pont)*