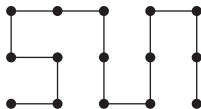


A1. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész előáll egy vagy több $2^r 3^s$ alakú szám összegeként (r és s nemnegatív egészek), úgy, hogy az összeg semelyik két tagja között sem áll fenn oszthatóság. (Például $23 = 9 + 8 + 6$.)

A2. Legyen $S = \{(a, b) : a = 1, 2, \dots, n, b = 1, 2, 3\}$. A p_1, p_2, \dots, p_{3n} pontokat ebben a sorrendben összekötő töröttvonalat az S halmaz egy *bástyabejárásának* nevezzük, ha teljesülnek rá a következők: (i) $p(i) \in S$; (ii) p_i és p_{i+1} egységnyi távolságra vannak minden $1 \leq i < 3n$ esetén; (iii) minden $p \in S$ esetén pontosan egy olyan i található, amelyre $p_i = p$.

Hány olyan bástyabejárás van, amelyik az $(1; 1)$ pontban kezdődik és az $(n; 1)$ pontban ér véget?
(Az *ábra* egy lehetséges bástyabejárást mutat az $n = 5$ esetben.)



A3. Tegyük fel, hogy az n -edfokú $p(z)$ polinom valamennyi gyöke egységnyi abszolút értékű a komplex számsíkon. Legyen $g(z) = \frac{p(z)}{z^{n/2}}$. Bizonyítsuk be, hogy a $g'(z) = 0$ egyenlet valamennyi gyöke egységnyi abszolút értékű.

A4. Legyen H olyan $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden eleme 1 vagy -1 és a mátrix bármely két sora ortogonális. Bizonyítsuk be, hogy ha H -nak van olyan $a \times b$ méretű részmátrixa, amelynek minden eleme 1 , akkor $ab \leq n$.

A5. Határozzuk meg $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$ értékét.

A6. Legyen az $n \geq 4$ adott egész szám. Tegyük fel, hogy a P_1, P_2, \dots, P_n pontokat egymástól függetlenül, véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választottuk egy körvonalon. Tekintsük azt az n oldalú konvex sokszöget, amelynek a P_i pontok a csúcsai. Mennyi a valószínűsége, hogy ennek a sokszögnek legalább az egyik belső szöge hegyeszőg?

B1. Adjunk meg olyan nem zérus $P(x, y)$ polinomot, amelyre minden valós a szám esetén teljesül, hogy $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$. ($\lfloor t \rfloor$ a t -nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelenti.)

B2. Határozzuk meg azokat az n, k_1, \dots, k_n pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4$, továbbá

$$\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

B3. Keressük meg mindazokat a differenciálható $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ függvényeket, amelyekhez létezik olyan a pozitív szám, hogy minden pozitív x számra

$$f' \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{x}{f(x)}.$$

B4. Adott pozitív egész m, n számokra jelölje $f(m; n)$ azoknak az egész számokból álló (x_1, x_2, \dots, x_n) n -eseknek a számát, amelyekre teljesül, hogy $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq m$. Bizonyítsuk be, hogy $f(m; n) = f(n; m)$.

B5. Legyen a $P(x_1, \dots, x_n)$ az x_1, \dots, x_n változók valós együtthatós polinomja. Tegyük fel, hogy

(a) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) P(x_1, \dots, x_n)$ azonosan nulla, továbbá hogy

(b) $x_1^2 + \dots + x_n^2$ osztja $P(x_1, \dots, x_n)$ -et.

Bizonyítsuk be, hogy a $P(x_1, \dots, x_n)$ polinom azonosan nulla.

B6. Jelölje S_n az $1, 2, \dots, n$ számok permutációinak a halmazát. Ha $\pi \in S_n$, akkor legyen $\sigma(\pi) = 1$, ha a π permutáció páros és legyen $\sigma(\pi) = -1$, ha a π permutáció páratlan. Jelölje ezen kívül $\nu(\pi)$ a π permutáció fixpontjainak a számát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{\pi \in S_n} \frac{\sigma(\pi)}{\nu(\pi) + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$