

*Giovanni Ceva* (1647–1736) olasz matematikus tétele arra ad szükséges és elégséges feltételt, hogy egy háromszög egy-egy csúcsán áthaladó három egyenes mikor párhuzamos, vagy metszi egymást egy pontban. Bevezetésképpen idézzük fel a tételt:

**1. tétel (Ceva tétele).** *Legyen  $D, E, F$  rendre az  $ABC$  háromszög  $BC, AC$  és  $AB$  oldalának egy-egy pontja.  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$  akkor és csak akkor, ha az  $AD, BE$  és  $CF$  egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.*

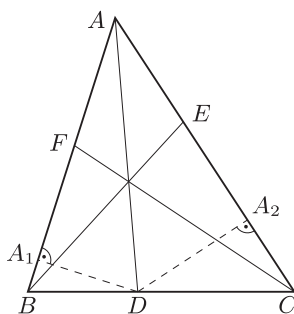
A bizonyítás megtalálható például Hajós György: *Bevezetés a geometriába* c. könyvében [2].

Sok feladatban azonban az említett feltétel bonyolult számításokra vezet. Versenyeken, ahol a feladatok megoldása időhöz van kötve, fontos, hogy minél egyszerűbb, könnyebben használható feltételeket tudjunk felírni. A Ceva-tétel következő, trigonometrikus alakját Matolcsi Máté dolgozatából [4] vettem át:

**2. tétel (Ceva tétele, trigonometrikus változat).** *Az  $AD, BE$  és  $CF$  egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak vagy mennek át egy ponton, ha*

$$\frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle DAC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CBE}{\sin \sphericalangle EBA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACF}{\sin \sphericalangle FCB} = 1,$$

azaz az  $AD, BE$  és  $CF$  szakaszok megfelelő oldalaktól vett távolságarányainak szorzata 1 (1. ábra).



1. ábra

**Bizonyítás.** Bocsássunk merőlegeseket  $D$ -ből az  $AB$  és  $AC$  oldalakra! A talppontok legyenek  $A_1$  és  $A_2$ . Tegyük fel, hogy  $AD, BE$  és  $CF$  egy ponton mennek át. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle DAC} = \frac{DA_1}{DA_2} = \frac{BD \sin \beta}{DC \sin \gamma}$$

és ez éppen az  $AD$  egyenesnek az  $AB$  és  $AC$  oldalegyenesektől mért távolságaránya. Hasonlóképpen  $\frac{\sin \sphericalangle CBE}{\sin \sphericalangle EBA} = \frac{CE \sin \gamma}{EA \sin \alpha}$ , valamint  $\frac{\sin \sphericalangle ACF}{\sin \sphericalangle FCB} = \frac{AF \sin \alpha}{FB \sin \beta}$ . Összeszorozva

$$\begin{aligned} \frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle DAC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CBE}{\sin \sphericalangle EBA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACF}{\sin \sphericalangle FCB} &= \frac{BD \sin \beta}{DC \sin \gamma} \cdot \frac{CE \sin \gamma}{EA \sin \alpha} \cdot \frac{AF \sin \alpha}{FB \sin \beta} \\ &= \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \end{aligned}$$

Megfordítva, ha

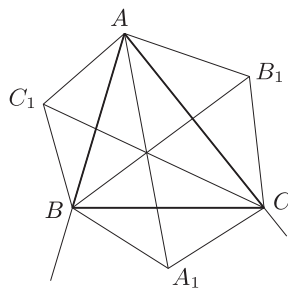
$$\frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle DAC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CBE}{\sin \sphericalangle EBA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACF}{\sin \sphericalangle FCB} = 1,$$

akkor ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ , azaz  $AD, BE$  és  $CF$  egy ponton mennek át.  $\square$

Egy szintén rövid, ám Ceva tételét nem használó bizonyítás olvasható a KöMaL egy régebbi számában [1]. Megjegyzendő, hogy a tétel mindkét változata szerepel a *Theorems in the geometry of the triangle* c. angol nyelvű jegyzetben [3].

Térjünk most már rá az alkalmazásokra. Figyeljük meg, hogy az alábbiakban az eredeti Ceva-tételt csak nehezen tudnánk alkalmazni, míg a trigonometrikus változat a szinusz-tétel segítségével jól alakítható összefüggéseket eredményez.

**1. feladat.** *Legyenek a hegyesszögű  $ABC$  háromszög oldalaira írt hasonló egyenlőszárú háromszögek  $ABC_1, BCA_1$  és  $CAB_1$ . Ekkor az  $AA_1, BB_1$  és  $CC_1$  szakaszok egy ponton mennek át (2. ábra).*



2. ábra

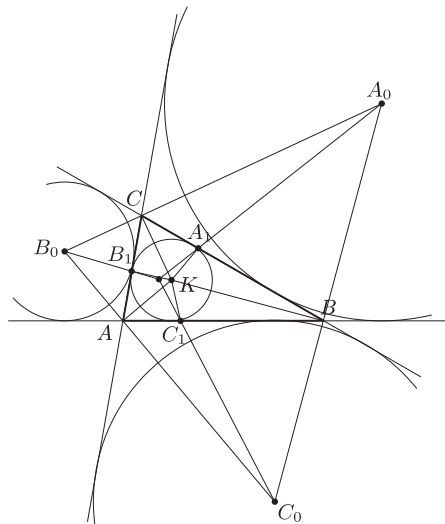
**Bizonyítás.** A módosított Ceva-tételt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin BAA_1 \sphericalangle}{\sin A_1AC \sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBB_1 \sphericalangle}{\sin B_1BA \sphericalangle} \cdot \frac{\sin ACC_1 \sphericalangle}{\sin C_1CB \sphericalangle} = \\ &= \frac{A_1C}{\sin A_1AC \sphericalangle} \cdot \frac{\sin BAA_1 \sphericalangle}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{\sin B_1BA \sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBB_1 \sphericalangle}{CB_1} \cdot \frac{C_1B}{\sin C_1CB \sphericalangle} \cdot \frac{\sin ACC_1 \sphericalangle}{AC_1} = \\ &= \frac{A_1A}{\sin A_1CA \sphericalangle} \cdot \frac{\sin ABA_1 \sphericalangle}{A_1A} \cdot \frac{B_1B}{\sin B_1AB \sphericalangle} \cdot \frac{\sin BCB_1 \sphericalangle}{B_1B} \cdot \frac{C_1C}{\sin C_1BC \sphericalangle} \cdot \frac{\sin CAC_1 \sphericalangle}{C_1C} = \\ &= \frac{\sin ABA_1 \sphericalangle}{\sin A_1CA \sphericalangle} \cdot \frac{\sin BCB_1 \sphericalangle}{\sin B_1AB \sphericalangle} \cdot \frac{\sin CAC_1 \sphericalangle}{\sin C_1BC \sphericalangle} = 1, \end{aligned}$$

ahol az első lépésben azt használtuk ki, hogy a háromszögek egyenlő szárúak, a második lépésben pedig a szinusztételt. Végül a számlálóban és a nevezőben egyenlő szögek maradtak, hiszen az oldalakra írt háromszögek hasonlósága miatt  $ABA_1 \sphericalangle = C_1BC \sphericalangle$ ,  $BCB_1 \sphericalangle = A_1CA \sphericalangle$  és  $CAC_1 \sphericalangle = B_1AB \sphericalangle$ .  $\square$

A következő feladat az 1990. évi Kürschák-versenyen szerepelt:

**2. feladat (Kürschák-feladat).** Az  $ABC$  háromszög beírt körének középpontja legyen  $K$ , a hozzáírt körök középpontjai legyenek  $A_0, B_0, C_0$ . Jelölje  $A_1$  a  $BC$  oldal és a  $BKC$  szög felezőjének,  $B_1$  az  $AC$  oldal és a  $AKC$  szög felezőjének,  $C_1$  pedig az  $AB$  oldal és a  $AKB$  szög felezőjének a metszéspontját. Ekkor az  $A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1$  egyenesek egy ponton mennek át.



3. ábra

**Bizonyítás.**  $A_0, B_0, C_0$  a megfelelő külső szögfelezők metszéspontja, így az  $A, B, C$  csúcsok az  $A_0B_0C_0$  háromszög oldalaira esnek. Az  $A_0A_1$  egyenesre vonatkozó távolságarány az  $A_0B_0C_0$  háromszögben

$$\frac{CA_1 \cdot \sin BCA_0 \sphericalangle}{A_1B \cdot \sin CBA_0 \sphericalangle} = \frac{CA_1 \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{A_1B \cdot \cos \frac{\beta}{2}}.$$

Hasonlóan kaphatók a  $B_0B_1$  és a  $C_0C_1$  egyenesre vonatkozó távolságarányok, így e három arány szorzata

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}.$$

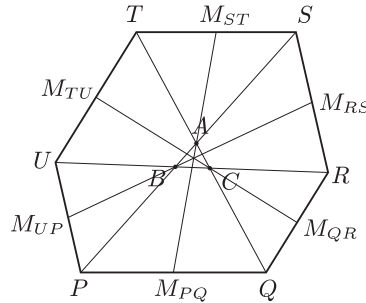
A szögfelezőtétel szerint másfelől

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CK}{BK}, \quad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AK}{CK} \quad \text{és} \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BK}{AK},$$

az említett három arány szorzata tehát 1. Ceva tételének módosított változata szerint tehát az  $A_0A_1$ ,  $B_0B_1$ ,  $C_0C_1$  egyenesek egy ponton mennek át.  $\square$

A következő feladat egy olimpiai válogatóversenyen szerepelt 1991-ben:

**3. feladat.** Legyenek a  $PQRSTU$  hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Igazoljuk, hogy a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő  $M_{PQ}M_{ST}$ ,  $M_{QR}M_{TU}$  és  $M_{RS}M_{UP}$  szakaszok egy ponton mennek át (4. ábra).



4. ábra

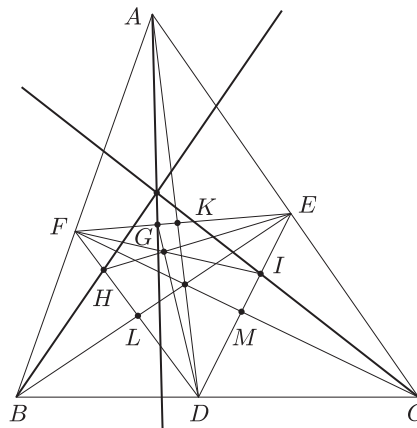
**Bizonyítás.** Hogy a Ceva-tételt alkalmazhassuk, találnunk kell egy olyan háromszöget, amelynek a csúcsain mennek át a megadott szakaszok. Húzzuk meg a  $PS$ ,  $QT$  és  $RU$  átlókat. Ismeretes, hogy egy trapéz átlóinak a metszéspontja rajta van a trapéz párhuzamos oldalait összekötő középvonalán, ezért például  $M_{PQ}$ ,  $A$  és  $M_{ST}$  egy egyenesen vannak. (Valóban,  $PQ$  és  $ST$  párhuzamossága miatt az  $APQ$  és az  $AST$  háromszögek hasonlóak. Az  $A$  fixpontú középpontos hasonlóság, ami  $P$ -t  $S$ -be,  $Q$ -t pedig  $T$ -be viszi át,  $M_{PQ}$ -t  $M_{ST}$ -be viszi, tehát ezek egyenese áthalad  $A$ -n.) Egy kis átfogalmazással most már az a feladatunk, hogy belássuk, hogy az  $ABC$  háromszög csúcsain áthaladó  $M_{PQ}M_{ST}$ ,  $M_{QR}M_{TU}$  és  $M_{RS}M_{UP}$  egyenesek egy ponton mennek át. Írjuk fel  $M_{PQ}$  távolságát az oldalaktól. Most azonban ne az  $A$  csúcsnál levő szöge(ke)t használjuk, hanem az  $APQ$  háromszög másik két szögét, amelyekről többet tudunk. Eszerint  $M_{PQ}$  távolsága az  $AB$  és  $AC$  oldalaktól  $PM_{PQ} \cdot \sin SPQ \triangleleft$ , illetve  $M_{PQ}Q \cdot \sin PQT \triangleleft$ , és minthogy  $M_{PQ}$  felezőpont, ezek aránya  $\frac{\sin SPQ \triangleleft}{\sin PQT \triangleleft}$ . A szinusz-tétel szerint ez megegyezik  $\frac{AQ}{AP}$ -vel, ami az  $APQ$  és az  $ATS$  háromszögek már említett hasonlósága miatt  $\frac{QT}{PS}$ -sel egyenlő. Hasonlóan kapjuk, hogy  $M_{RS}$ -nek a  $BC$  és  $BA$  oldalegyenesektől vett távolságainak aránya  $\frac{PS}{UR}$ , míg  $M_{TU}$  távolságainak aránya a  $CA$  és  $CB$  oldalegyenesektől  $\frac{UR}{QT}$ . Ezen arányok szorzata 1, tehát  $M_{PQ}M_{ST}$ ,  $M_{QR}M_{TU}$  és  $M_{RS}M_{UP}$  valóban egy ponton mennek át.  $\square$

Végül egy érdekes típusfeladat:

**4. feladat.** Legyenek az  $ABC$  háromszögben az  $AD$ ,  $BE$  és  $CF$  szögfelezők, a  $DEF$  háromszögben pedig a  $DG$ ,  $EH$  és  $FI$  szakaszok magasságok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az  $AG$ ,  $BH$  és  $CI$  szakaszok egy ponton mennek át.

Ha pusztán az eredeti Ceva tétellel bizonyítanánk, meglehetősen sok, bonyolult arányt kellene kiszámítanunk. Szerencsére az általunk használt trigonometrikus változattal egy egyszerű, egyben jóval általánosabb állítást kapunk.

**5. feladat.** Ha az  $ABC$  háromszögben az  $AD$ ,  $BE$  és  $CF$  szakaszok egy ponton mennek át, valamint a  $DEF$  háromszögben a  $DG$ ,  $EH$  és  $FI$  szakaszok egy ponton mennek át, akkor az  $AG$ ,  $BH$  és  $CI$  szakaszok is egy ponton mennek át.



5. ábra

**Bizonyítás.** Legyen  $K$  az  $AD$  és  $EF$ ,  $L$  a  $BE$  és  $DF$ ,  $M$  pedig a  $CF$  és  $DE$  szakaszok metszéspontja.  $K$  távolsága  $AB$ -től és  $AC$ -től  $FK \cdot \sin AFK \triangleleft$ , illetve  $KE \cdot \sin KEA \triangleleft$ . Hasonlóan írhatjuk fel  $L$  és  $M$  távolságát az  $ABC$  háromszög megfelelő oldalaitól. Mivel  $AK$ ,  $BL$  és  $CM$  egy ponton mennek át, felírhatjuk a Ceva-tétel módosított változatát az  $ABC$  háromszögben:

$$(1) \quad \frac{FK \cdot \sin AFK \triangleleft}{KE \cdot \sin KEA \triangleleft} \cdot \frac{DL \cdot \sin BDL \triangleleft}{LF \cdot \sin LFB \triangleleft} \cdot \frac{EM \cdot \sin CEM \triangleleft}{MD \cdot \sin MDC \triangleleft} = 1.$$

Másrészt a  $DEF$  háromszögre felírva az eredeti Ceva-tételt:

$$(2) \quad \frac{EK}{KF} \cdot \frac{FL}{LD} \cdot \frac{DM}{ME} = 1.$$

Megszorozva ezzel az előző egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad \frac{\sin AFK \triangleleft}{\sin KEA \triangleleft} \cdot \frac{\sin BDL \triangleleft}{\sin LFB \triangleleft} \cdot \frac{\sin CEM \triangleleft}{\sin MDC \triangleleft} = 1.$$

Hátra van még, hogy azt is kihasználjuk, amit a  $DG$ ,  $EH$  és  $FI$  szakaszokról tudunk. A  $DEF$  háromszögben alkalmazva Ceva tételét,

$$(4) \quad \frac{EG}{GF} \cdot \frac{FH}{HD} \cdot \frac{DI}{IE} = 1.$$

Elosztva ezzel (3)-at:

$$(5) \quad \frac{FG \cdot \sin AFK \triangleleft}{GE \cdot \sin KEA \triangleleft} \cdot \frac{DH \cdot \sin BDL \triangleleft}{HF \cdot \sin LFB \triangleleft} \cdot \frac{EI \cdot \sin CEM \triangleleft}{ID \cdot \sin MDC \triangleleft} = 1,$$

ez az egyenlőség pedig éppen azt állítja, hogy az  $AG$ ,  $BH$  és  $CI$  szakaszok megfelelő oldalaktól vett távolságarányainak szorzata 1, azaz Ceva tételének módosított változata szerint ezek a szakaszok is egy ponton mennek át.  $\square$

Köszönetet szeretnék mondani Matolcsi Máténak a cikk alapötletéért, és azért is, hogy [4] dolgozatát felhasználhattam.

### Hivatkozások

- [1] Surányi János: Az 1990. évi Kürschák József Matematika Tanulóverseny feladatainak megoldása, *Középiszkolai Matematikai Lapok*, **41** (1991), 51–61.
- [2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó (Budapest, 1972).
- [3] P. Körtesi: *Theorems in the geometry of the triangle*, Junior Mathematical Society Miskolc (Miskolc, 1998).
- [4] M. Matolcsi: *Ceva's theorem and a few extensions*, Extended Essay (Atlantic College, 1993).