I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyei közül valamelyik a 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő?

9 pont

2. Az ABC háromszög AB oldalán vegyük föl az M és N pontokat úgy, hogy $AM = MN = NB$ legyen. Jelölje A_1 a BC és B_1 az AC oldalak felezőpontját, valamint P legyen a BB_1 és CN, K pedig az AA_1 és CM szakaszok metszéspontja! Fejezze ki a PK szakasz hosszát az AB oldal hosszával! 10 pont

3. Oldja meg az

$$x^2 \cdot y^2 - 7x \cdot y^2 + 10y^2 + 44xy - 154y + 484 = 0$$

egyenletet, ha x és y pozitív prímszámok! 11 pont

4. Van-e olyan n természetes szám, amelyre az $A = 3n^2 + 3n + 7$ kifejezés egy természetes szám köbével egyenlő? 12 pont

5. A szimmetrikus $ABCD$ trapéz hosszabbik alapja AB. Az ABC háromszögbe írt kör középpontja O_1, a BCD háromszögbe írt kör középpontja O_2.

Bizonyítsa be, hogy O_1O_2 merőleges AB-re! 13 pont

6. Egy elektronikus levelezőtársaságnak 2004 tagja van. Közülük néhányan személyesen is ismerik egymást (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsa be, hogy a 2004 tag két csoportba osztható úgy, hogy a csoportokon belüli személyes ismeretségek számának összege nem több, mint a két csoport tagjai közötti ismeretségek száma! 15 pont

Második forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_3 \frac{3}{x} \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 x. \qquad \text{(8 pont)}$$

2. Melyek azok az x, y racionális számokból álló számpárok, amelyekre teljesül, hogy

$$4x - y = \frac{625}{y^2} \quad \text{és} \quad x - 4y = \frac{625}{x^2}\,? \qquad \text{(8 pont)}$$

3. Egy körbe beírtunk egy szabályos háromszöget. Egyik oldalával párhuzamosan olyan szelőt húztunk, mely metszi a háromszög másik két oldalát és a kapott húr $\frac{7}{5}$-öd része van a háromszögön belül. Tudjuk még azt is, hogy mind a háromszög oldala, mind a húr háromszögön belüli és azon kívüli darabjainak mérőszáma egész szám.

a) Mekkora a legkisebb ilyen háromszög oldala?

b) Milyen távol van ez a húr a kör középpontjától? (10 pont)

4. Az (a_n) sorozatban $a_{n+1} = 4 \cdot a_n - a_n^2$. Milyen a_1 egész szám esetén lesz a sorozat egy bizonyos tagtól kezdve állandó? (12 pont)

5. Az ABC derékszögű háromszögben a C csúcsból az AB átfogóra rajzolt magasságvonal az AB átfogót a D pontban metszi. A CD szakasz felezőpontja O, az A pontot az O-val összekötő egyenesnek a BC-vel való közös pontja M. Mutassa meg, hogy $\frac{CM}{MB} = \cos^2 \alpha$, ahol α a háromszög A csúcsánál levő belső szöget jelenti! (12 pont)

Harmadik (döntő) forduló

1. Melyik az a legkisebb p egész szám, amelyre a

$$\sqrt{32x^4 + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{32x^4 - \frac{1}{x^4}} = (p-2) \cdot x^2$$

egyenletnek van valós megoldása?

Adja meg erre a p számra az egyenlet összes valós megoldását! (12 pont)

2. Adja meg az összes olyan n természetes számot, amelyre a $3^n + 63$ kifejezés értéke négyzetszám! (12 pont)

3. Az $ABCD$ tetraéderben a D csúcsnál levő élszögek derékszögek, az ABC háromszög szögei α, β, γ. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = \frac{9}{2}\,\frac{V^2}{T^3},$$

ahol V az $ABCD$ tetraéder térfogata, T pedig az ABC háromszög területe! (16 pont)

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Az a_n sorozatot (n természetes szám) a következőképpen értelmezzük:

$$a_0 = 2 \quad \text{és} \quad a_n = a_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}, \quad \text{ha} \quad n > 0.$$

Adjuk meg a_n-t n függvényében! 7 pont

2. Az $ABCD$ konvex négyszög csúcsai egy körön vannak. A szomszédos oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok a négyszögből négy háromszöget vágnak le. Igazoljuk, hogy e négy háromszög körülírt körei egy ponton haladnak át! 7 pont

3. Az a, b, c olyan pozitív egészek, amelyekre az $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ tört értéke racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ egész szám! 7 pont

4. Az ABC háromszög beírt körének középpontja O. Az OAB, OBC, OCA háromszögek súlypontjai rendre C', A', B'. Igazoljuk, hogy az AA', BB', CC' szakaszok egy ponton mennek át! 7 pont

5. Igazoljuk, hogy 102 darab pozitív egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége vagy összege osztható legyen 200-zal! 7 pont

Második forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (x, y, z valós számok):

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10, \tag{1}$$

$$x^2 - y^2 - z^2 = 476, \tag{2}$$

$$2^{(\lg|y| - \lg z)} = 1. \tag{3}$$

2. Az ABC háromszög BC oldalán van a B_1 és C_1, AB oldalán a B_2, AC oldalán a C_2 pont. B_1B_2 párhuzamos AC-vel, C_1C_2 párhuzamos AB-vel. A B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek metszéspontja D. Jelölje a BB_1B_2 és CC_1C_2 háromszögek területét T_B és T_C.

a) Igazoljuk, hogy ha $T_B = T_C$, akkor az ABC háromszög súlypontja rajta van az AD egyenesen.

b) Határozzuk meg $\dfrac{T_B}{T_C}$ értékét, ha D az ABC háromszög beírt körének középpontja és $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$.

3. Egy szabályos ötszög csúcsaiba egy-egy valós számot írtunk, majd az ötszög oldalaira és átlóira felírtuk a végpontoknál levő számok összegét.

Bizonyítsuk be, hogy ha az utóbbi 10 számból 7 egész, akkor mindegyik egész kell legyen.

4. Okos Ottó felsorolta az n természetes szám pozitív osztóit nagyság szerinti sorrendben. Elsőként az 1-et, majd sorban egymás után, végül nyolcadikként következett az n. A hatodikként felsorolt osztóról tudjuk, hogy $20 \le d \le 25$. Mi lehetett n?

Harmadik (döntő) forduló

1. Az n pozitív egész szám „elbűvölő”, ha létezik n darab olyan (nem feltétlenül különböző) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész szám, hogy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = n$. Melyek az „elbűvölő” számok?

2. A feladatban szereplő változók pozitív valós számokat jelentenek.

a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}.$$

b) Igaz-e minden esetben, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \frac{a+b+c}{3}+\sqrt[3]{abc}?$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög: $\alpha=60^\circ$, $AB=c$, $CA=b$ és $b>c$. A háromszög magasságpontja M, köré írt körének középpontja O. Bizonyítsuk be, hogy

I. ha az OM egyenes az AB oldalt X-ben, a CA oldalt Y-ban metszi, akkor az AXY háromszög kerülete $b+c$;

II. $OM=b-c$.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $ABCD$ húrnégyszögben

$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}.$$

7 pont

2. Hány $0<x<2004$-re teljesül $x+\lfloor x^2\rfloor = x^2+\lfloor x\rfloor$? (Itt $\lfloor c\rfloor$ a c valós szám (alsó) egészrészét jelöli, azaz a legnagyobb olyan k egész számot, amelyre $k\leq c$.) 7 pont

3. Nevezzünk három, nem feltétlenül különböző, 1-nél nagyobb egészt barátságos számhármasnak, ha bármely kettő önmagánál kisebb pozitív osztóinak az összege a harmadik szám. Határozzuk meg az összes olyan barátságos számhármast, amelyben a(z egyik) legnagyobb szám páros. 7 pont

4. Tekintsük a pozitív egészek olyan, k (különböző) elemből álló A részhalmazát, amelyre, ha két (nem feltétlenül különböző) pozitív egész egyike sem eleme A-nak, akkor az összegük sincs A-ban. Maximálisan mennyi lehet az A elemeinek az összege? 7 pont

5. Tekintsünk egy négyoldalú gúlát, amelynek az alapja húrnégyszög. Vetítsük a gúla magasságának talppontját merőlegesen a gúla négy oldalélére. Bizonyítsuk be, hogy a négy vetület egy körön van. 7 pont

Második (döntő) forduló

1. Egy trapézt az egyik szárával párhuzamosan egy paralelogrammára és egy háromszögre bontunk, és megrajzoljuk a trapéz és a paralelogramma átlóit. Mennyi a trapéz párhuzamos oldalainak az aránya, ha a három átló által határolt háromszög területének és a trapéz területének az aránya maximális?

2. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k egészt, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: Minden olyan esetben, amikor az x, y egész számokra $xy+1$ osztható k-val, akkor $x+y$ is osztható k-val.

3. Haydn és Beethoven a következő játékkal ünneplik Mozart születésnapját. Felváltva mondanak számokat a következő szabály szerint. Először Haydn kimondja a 2 számot. Ettől kezdve a soron következő játékos az addig elhangzott számok közül kettőnek az összegét vagy a szorzatát mondhatja (szabad egy számot önmagával is összeadnia vagy megszoroznia), de mindenképpen olyan számot kell mondania, amely korábban nem hangzott el és 1756-nál nem nagyobb. Az nyer, aki elsőként tudja kimondani az 1756-ot. Kinek van nyerő stratégiája?