

Az első részben¹ azt a kérdést vetettük föl, hogy milyen számhármassokat lehet előállítani egy adott $(a; b; c)$ számhármassból kiindulva, ha egy-egy lépésben felcserélhetjük egy számhármassban az elemek sorrendjét, illetve egy már meglévő $(x; y; z)$ számhármassból elkészíthetjük az $(x; y; 2x + 2y - z)$ számhármast. Az $(a; b; c) \rightsquigarrow (x; y; z)$ jelölést használtuk arra, hogy az $(a; b; c)$ számhármassból el lehet jutni az $(x; y; z)$ számhármassba. Láttuk, hogy ez ekvivalencia reláció. Bevezettük az $n(a; b; c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$ mennyiséget, amelyről láttuk, hogy invariáns, nem változik a lépések során: az egyes ekvivalencia osztályokon belül tehát állandó. Ha $a + b + c$ páros, akkor az $N(a; b; c) = \frac{1}{4}n(a; b; c)$ egész számot a számhármass normájának hívtuk. Ez az invariáns közvetlenül nem bizonyult elég érzékenynek az **A. 376.** feladat megoldására: $N(5; 13; 42) = N(1; 21; 42) = 79$ és mivel nem bizonyítottuk be – nem is igaz –, hogy egyenlő normájú számhármassok ekvivalensek, a fenti egyenlőség ténye nem válaszolja meg a feladat kérdését. Most mutatunk egy az eddigieknél sokkal ravaszabb invariánst. A számolások során hivatkozás nélkül használjuk majd a norma tulajdonságait, amelyeket a cikk első részében igazoltunk.

Lánc törtek

Egy z valós számhoz hozzárendelhetünk egy lánc törte alakot:

$$z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ egész számokat a lánc törte jegyeinek hívjuk és a következőképpen számolhatók: legyen $z_0 = z$, $a_0 = [z_0]$, $z_1 = \frac{1}{z_0 - [z_0]}$, ha z_0 nem egész, $a_1 = [z_1]$, általában pedig $z_i = \frac{1}{z_{i-1} - [z_{i-1}]}$, ha z_{i-1} nem egész és $a_i = [z_i]$. Ha z_i egész, akkor megállunk.

Példa.

$$-5,6 = -6 + 0,4 = -6 + \frac{1}{2,5} = -6 + \frac{1}{2 + 0,5} = -6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

Ha z nem racionális, akkor nem kaphatunk véges lánc törte, mert ezek racionálisak. Ilyenkor egészek végtelen sorozatát kapjuk.

Példa.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}} \end{aligned}$$

A következőkben ezt úgy jelöljük, hogy

$$-5,6 = L(-6; 2; 2), \quad \text{illetve} \quad \sqrt{2} = L(1; 2; 2; \dots) = L(1; \overline{2}).$$

Könnyen látható, hogy $a_0 \in \mathbb{Z}$ tetszőleges lehet, de a_1 -től kezdve a jegyek pozitívak, ugyanis $1 > z_j - [z_j] \geq 0$. (Részletesebb) bevezetést ad a lánc törtekbe Freud Róbert – Gyarmati Edit: *Számelmélet* című könyvének 8.3. fejezete.

A továbbiakban olyan speciális számokra lesz szükségünk, amelyek lánc törte alakja *periodikus*. A fenti példák közül ilyen a $\sqrt{2}$: a lánc törte alak periódusa az egytagú „2” sorozat, amit így jelölünk: $\tilde{L}(\sqrt{2}) = (2)$. A periodicitást itt is úgy értelmezzük, mint a tizedestörteknél: elegendő, ha az a_n sorozat valahonnan kezdve periodikus, azaz ha $z_1 = L(3; 1; \overline{2})$, $z_2 = L(5; 1; 4; \overline{2})$, akkor $\tilde{L}(z_1) = \tilde{L}(z_2) = \tilde{L}(\sqrt{2}) = (2)$.

Feladat. Milyen szám lánc törte alakjai az alábbi sorozatok:

$$L(2; 2; \dots) = L(\overline{2}); \quad L(3; 1; \overline{2}); \quad L(5; 1; 4; \overline{2})?$$

Most bizonyítás nélkül kimondunk két tételt.

III. tétel². *A z szám lánc törte alakja akkor és csak akkor periodikus, ha $z = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ alakú, ahol a, b, c egészek, $b > 0$ nem négyzet szám és $c \neq 0$.*

¹KöMaL, 2005/10, 398–405. oldal.

²A III. tétel bizonyítása megtalálható Niven – Zuckerman, *Bevezetés a Számelméletbe*, Műszaki Kiadó (Budapest, 1978) c. könyvének 146–148. oldalán.

Hívjuk a z_1 és a z_2 valós számokat *hasonlóknak*, ha a két szám lántört alakjában véges sok, nem feltétlenül ugyanannyi kezdeti jegyet elhagyva a megmaradó jegyek sorozata azonos. Két véges lántört nyilván hasonló és hasonlóké például azok a számok is, amelyeknek $L(3; 1; \overline{2})$, illetve $L(5; 1; 4; \overline{2})$ a lántört alakja.

IV. tétel. A z_1 és z_2 valós számok pontosan akkor hasonlóak, ha léteznek olyan m, n, k, ℓ egészek, amelyekre $|kn - m\ell| = 1$ és $z_2 = \frac{kz_1 + \ell}{mz_1 + n}$.

A IV. tételnek valójában csak arra a következményére van szükségünk, hogy ha z_1 lántörtalakja periodikus, és z_2 a tétel szerinti kifejezése z_1 -nek, akkor z_1 és z_2 hasonlóak. A hasonlóság ebben az esetben azt jelenti, hogy z_2 lántörtalakja is periodikus, a két periódus azonos, $\tilde{L}(z_1) = \tilde{L}(z_2)$, bár az egyenlő periódusok a két lántört alakban általában nem ugyanott kezdődnek.

Feladatok. a) Legyen $z_1 = \frac{5}{6}$, $z_2 = \frac{4}{7}$. Írjuk fel z_2 -t $z_2 = \frac{kz_1 + \ell}{mz_1 + n}$ alakban, ahol $|kn - m\ell| = 1$. Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha $z_1 = L(3; 1; \overline{2})$ és $z_2 = L(\overline{2})$.

b) Adott valós számokra legyen $z_1 \sim z_2$, ha z_2 felírható z_1 segítségével a IV. tétel szerinti alakban. Igazoljuk, hogy $\sim$ a valós számok halmazán ekvivalencia reláció.

c) Igazoljuk, hogy ha z_1 és z_2 racionális számok, akkor z_2 felírható z_1 segítségével a IV. tétel szerinti alakban.

Megoldás az A. 376. feladatra. Tekintsük a következő kifejezést:

$$[a; b; c] = \frac{\frac{a+b-c}{2} + \sqrt{N(a; b; c)}}{a}.$$

Ekkor

$$\frac{\frac{a+b-c}{2} + \sqrt{N(a; b; c)}}{a} \cdot \frac{\frac{-(a+b-c)}{2} + \sqrt{N(a; b; c)}}{b} = \frac{N(a; b; c) - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2}{ab} = -1.$$

Azt kaptuk, hogy $[a; b; c] \cdot ([b; c; a] - 1) = -1$, vagyis $[b; c; a] = 1 - [a; b; c]^{-1}$. A III. tétel szerint $[a; b; c]$ lántörtalakja periodikus, ha $a \neq 0$ és $N(a; b; c)$ nem négyzetszám. A IV. tétel feltételei tehát teljesülnek a $k = m = 1$, $\ell = -1$, $n = 0$ szereposztással, ezért a két szám, $[a; b; c]$ és $[b; c; a]$ lántörtalakjának azonos a periódusa: $\tilde{L}([a; b; c]) = \tilde{L}([b; c; a])$.

Az $\tilde{L}([a; b; c])$ sorozat tehát nem változik, ha a számhármasságot ciklikusan permutáljuk. Az a, b, c elemek hatféle permutációja így – legfeljebb – két lántörtperiódust határoz meg: $\tilde{L}([a; b; c])$ -t és $\tilde{L}([b; a; c])$ -t. Nézzük most meg, mi történik $\tilde{L}([a; b; c])$ -vel a másik, $(a; b; c) \rightarrow (a; b; 2a + 2b + c)$ lépés során.

A definíciók alapján könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} [a; b; 2a + 2b + c] &= \frac{\frac{a+b-(2a+2b+c)}{2} + \sqrt{N(a, b, 2a + 2b + c)}}{a} = \\ &= \frac{-\frac{a+b-c}{2} + \sqrt{N(a; b; c)}}{a} = -[b; a; c]^{-1}. \end{aligned}$$

Mivel a IV. tétel szerint $\tilde{L}(-[b; a; c]^{-1}) = \tilde{L}([b; a; c])$, azért innen

$$\tilde{L}([a; b; 2a + 2b + c]) = \tilde{L}([b; a; c])$$

következik: az $(\tilde{L}([a; b; c]); \tilde{L}([b; a; c]))$ pár tehát invariáns! Hogy tényleg olyan erős, mint ahogy ígértük, az nyomban kiderül, amint ráeresztjük az A. 376. feladatra:

$$[5; 13; 42] = \frac{-12 + \sqrt{79}}{5} = L(-1; \overline{2; 1; 1; 5; 3}),$$

$$[13; 5; 42] = \frac{-12 + \sqrt{79}}{13} = L(-1; 1; \overline{3; 5; 1; 1; 2}),$$

$$[1; 21; 42] = \frac{-10 + \sqrt{79}}{1} = L(-2; \overline{1; 7; 1; 16}),$$

$$[21; 1; 42] = \frac{-10 + \sqrt{79}}{21} = l(-1; 1; 17; \overline{1; 7; 1; 16}).$$

Azt kaptuk, hogy $\tilde{L}([5; 13; 42]) = (2; 1; 1; 1; 5; 3)$ és $\tilde{L}([13; 5; 42]) = (3; 5; 1; 1; 1; 2)$, míg

$$\tilde{L}([1; 21; 42]) = \tilde{L}([21; 1; 42]) = (1; 7; 1; 16).$$

Mivel ez a két perióduspár nem azonos, nem juthatunk el az $(5; 13; 42)$ számhármastól az $(1; 21; 42)$ számhármastá a megadott lépésekkel.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy az $\tilde{L}([a; b; c])$ és $\tilde{L}([b; a; c])$ periódusok általában is vagy egyenlők, vagy pedig egymás palindromái. Ami fontosabb, hogy egy ilyen perióduspár már majdnem egyértelműen határozza meg a számhármast ekvivalencia osztályokat: ha két számhármast az a pár azonos, akkor bármelyikükből el lehet jutni a másiknak egy *racionális többszöröse* a megadott lépésekkel. Meg lehet ugyanis mutatni, hogy egy periodikus lánc törttel rendelkező z számból el lehet jutni egy tisztán periodikus lánc törthöz az $f(z) = -\frac{1}{z}$ és $g(z) = 1 - \frac{1}{z}$ függvények néhány egymásutáni alkalmazásával. Egy tisztán periodikus lánc törtből pedig kiszámolhatjuk $[a; b; c]$ -t. Az egyetlen probléma, hogy $[a; b; c] = [ka; kb; kc]$ miatt a tisztán periodikus lánc tört csak konstans szorzó erejéig határozza meg a számhármast, de az könnyen meggondolható, hogy ha $[a; b; c] = [x; y; z]$, akkor létezik olyan r racionális szám, hogy $r(a; b; c) = (x; y; z)$.

Egy osztály gráfja

Egy ekvivalencia osztály természetes módon meghatároz egy gráfot. Mivel a $\rightsquigarrow$ relációban érdektelen az elemek sorrendje, a gráf csúcsai legyenek az ekvivalens számhármastok elemeiből álló háromelemű halmazok és egy $(a; b; c)$ számhármast kössünk össze éllel a belőle közvetlenül elérhető $(a; b; 2a + 2b - c)$, $(a; 2a + 2c - b; c)$, $(2b + 2c - a; b; c)$ számhármastokkal. Lehetséges, hogy e három számhármastól kettő azonos, sőt, az is megtörténhet, hogy egyikük megegyezik az eredetivel: a hurokért ilyenkor hagyjuk el. Az így adódó gráf nyilván összefüggő, a csúcsai pedig legfeljebb harmadfokúak.

Tekintsük az olyan számhármastokat, amelyekben van pozitív és negatív szám is. Hívjuk az ilyen számhármastokat *maghármastoknak*. Ezek a fenti gráf egy részgráfját feszítik ki, amelyet *magnak* fogunk hívni. A magban a pontok foka legfeljebb kettő, ugyanis egy maghármast eltérő előjelű számát lecserélve nem magbeli számhármast kapunk.

Célunk a mag és az eredeti gráf leírása.

Az első kérdés, hogy van-e egyáltalán maghármast, illetve ha igen, akkor hány van. Láttuk, hogy egy osztályon belül $n(a; b; c)$ invariáns. Azt állítjuk, hogy ha ez a mennyiség az adott osztályra nem pozitív, akkor az osztály nem tartalmaz maghármast, ha pedig pozitív, akkor legfeljebb csak véges sokat. Tegyük fel ugyanis, hogy $a < 0 < b$. Ekkor

$$(a + b - c)^2 = n(a; b; c) + 4ab \leq n(a; b; c) - 4.$$

Ha $n(a; b; c) \leq 0$, akkor ez nyilván nem lehetséges. Ha $n(a; b; c) > 0$, akkor csak véges sok négyzetszám kisebb $n(a; b; c)$ -nél és mindegyikük legfeljebb véges sok $(a; b)$ és így legfeljebb véges sok $(a; b; c)$ számhármast határoz meg. $\square$

Feladatok. a) Bizonyítsuk be, hogy $n(0; k; \ell)$ négyzetszám.

b*) Bizonyítsuk be, hogy ha $n(a; b; c)$ négyzetszám, akkor léteznek olyan k, ℓ egészek, hogy $(a; b; c) \rightsquigarrow (0; k; \ell)$.

Legyen $n(a; b; c)$ adott. Az **A. 376.** feladat megoldásakor láttuk, hogy az $n(a; b; c)$ invariáns nem választja szét az ekvivalencia osztályokat, több olyan ekvivalencia osztály is lehetséges, amelynek elemeire $n(a; b; c)$ ugyanaz az érték. Megmutatjuk, hogy ha $n(a; b; c) > 0$ és nem négyzetszám, akkor ha nem is egyetlen, de mindenképpen csak véges sok olyan osztály van, amelynek elemeire $n(a; b; c)$ az adott értékkel egyenlő. Ehhez elég megmutatni, hogy minden osztályban van maghármast, ezek száma ugyanis, mint láttuk, véges. Mivel $n(a; b; c)$ nem négyzetszám, így a fenti feladat szerint egyetlen számhármast sem tartalmazhatja a 0-t. Másrészt három pozitív számot tartalmazó számhármast nem lehet összekötve három negatív számot tartalmazó számhármastal, hiszen szomszédos számhármastokban két szám azonos. Ha tehát $n(a; b; c)$ nem négyzetszám és az $(a; b; c)$ számhármast osztálya nem tartalmaz maghármast, akkor az ekvivalencia osztály minden számhármastja azonos előjelű számokból áll: mindegyikük pozitív vagy mindegyikük negatív. A (-1) -gyel való szorzás miatt feltehetjük, hogy minden számhármast csupa pozitív számot tartalmaz. Ennek mond ellent az alábbi

V. tétel. *Ekvivalensek az $(a; b; c)$ egész számhármastokra:*

(1) minden x, y, z számhármastra (melyre $(a; b; c) \rightsquigarrow (x, y, z)$) teljesül, hogy $x, y, z > 0$;

(2) $n(a; b; c) < 0$ és $a > 0$.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2). $a > 0$ triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy $n = n(a; b; c) \geq 0$, ekkor persze $N = \frac{1}{4}n > 0$ (még ha nem is feltétlenül egész). Legyen $0 < x \leq y \leq z$ olyan, hogy $(a; b; c) \rightsquigarrow (x, y, z)$ és $x + y + z$ minimális. Ekkor $2x + 2y - z \geq z$, így $x + y \geq z$. Tehát $z = x + y - 2\sqrt{xy + N} \geq y$, így $x \geq 2\sqrt{xy + N} \geq 2\sqrt{x^2 + 0} = 2x$, ami ellentmondás.

(2) $\Rightarrow$ (1). $xy = \left(\frac{x + y - z}{2}\right)^2 - N > 0$ így x, y, z előjele megegyezik, ez minden lépésben teljesül. Mivel $a > 0$, így a végén $x, y, z > 0$.

Tehát azonnal kapjuk, hogy véges sok osztály van, ha $n(a; b; c) > 0$.

Feladatok. a) Bizonyítsuk be, hogy akkor is véges sok osztály van, ha $n(a; b; c) < 0$, vagy ha pozitív négyzetszám.

b) Igazoljuk, hogy ha $n(a; b; c) = 0$, akkor végtelen sok osztály van. Mik ezek?

Folytassuk a névadást: azon számhármakat, amelyekben mind a három szám előjele megegyezik, *héhármak*oknak fogjuk hívni. Tekintsük a $0 < a \leq b \leq c$ számokat. Ezekre $2b + 2c - a > c$, illetve $2a + 2c - b > c$, tehát, ha a -t vagy b -t lecseréljük, akkor olyan héhármast kapunk, amelyben a legnagyobb szám értéke nőtt. Hasonló állítás igaz a negatív elemű számhármakokra is. Ennek az egyszerű észrevételnek messzemenő következményei vannak:

VI. tétel. a) *Héhármak nem alkothatnak kört.*

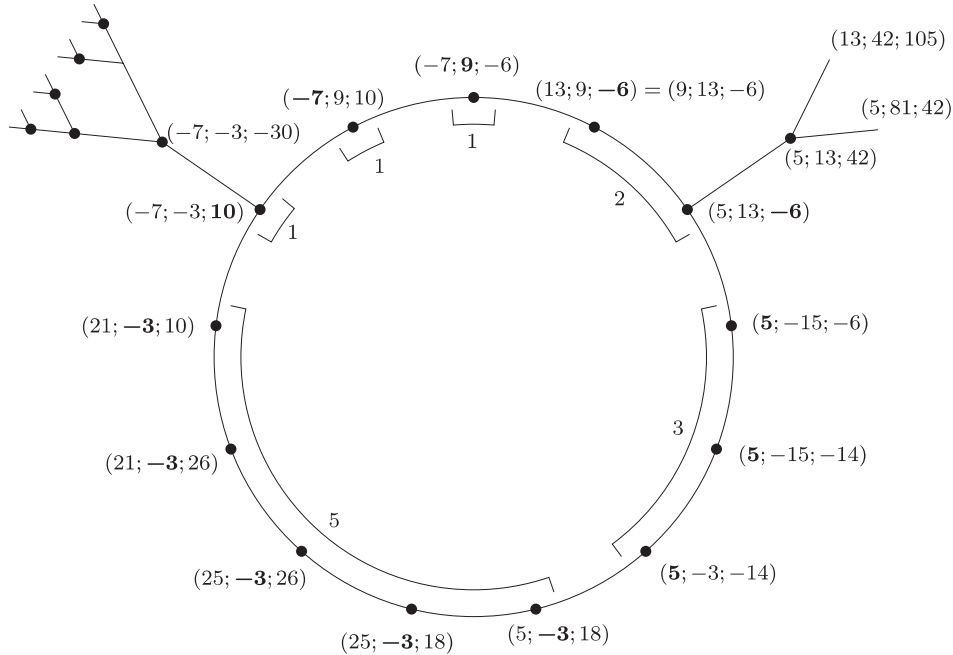
b) *Két maghármast nem köthet össze héhármakokból álló út.*

Bizonyítás. Mindkét esetben feltehetjük, hogy a héhármakok pozitív számhármakokból állnak (ha nem, akkor szorozzuk az egészet (-1) -gyel).

a) Tegyük fel, hogy van héhármakokból álló kör és tekintsük a körben előforduló legnagyobb számot. Legyen ez c_m , az ezt tartalmazó számhármak pedig legyen $(a_m; b_m; c_m)$, ahol $0 < a_m \leq b_m \leq c_m$. Az észrevétel szerint a_m -et vagy b_m -et lecserélve c_m -nél nagyobb számot kapunk, tehát a számhármak mindkét szomszédjánál c_m -et kellett lecserélnünk. A két szomszéd tehát megegyezik, ez pedig körben nem lehetséges.

b) Tegyük fel, hogy van két maghármast összekötő héhármakokból álló út. Legyen $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_{n-1} \rightarrow t_n$ egy út a gráfban, ahol $t_k = (a_k; b_k; c_k)$. Feltehetjük, hogy $a_1 < 0 < b_1 \leq c_1$ és $a_n < 0 < b_n \leq c_n$ és $0 < a_k \leq b_k \leq c_k$, ha $2 \leq k \leq n-1$. Most is vegyük a $3n$ szám közül a legnagyobbat. Az előbbi gondolatmenet szerint ez nem lehet $c_2, \dots, c_{n-1}$ egyike sem. Nem lehet viszont c_1 és c_n sem, mert az első lépésben biztosan a negatív a_1 -et cseréljük le $2c_1 + 2b_1 - a_1 > c_1$ -re, míg az utolsóban a negatív a_n -et $2c_n + 2b_n - a_n > c_n$ -re. Ez az ellentmondás bizonyítja az állításunkat. $\square$

Ez az egyszerű tétel magában is elintézi az **A. 376.** feladatot. Tekintsük ugyanis az $(5; 13; 42)$ számhármak osztályának a gráfját. Lépünk egyet: $(5; 13; 42) \rightarrow (5; 13; -6)$, majd a talált maghármastól indulva járjuk be a magot: egy kört kapunk (*ábra*).



Mivel két maghármast nem köthet össze héhármakokból álló út, azért a mag általában is összefüggő részgráf és egy-egy maghármastól „leágazó gráf” csupa héhármastól áll. Az így adódó „héjak” ráadásul diszjunktak, megint csak amiatt, hogy két maghármast nem köthet össze héhármakokból álló út. Mivel láttuk, hogy a héjak körmentesek, mindegyikük egy-egy végtelen bináris fa.

Általában pedig a gráf magja összefüggő gráf, amelyben minden csúcs foka legfeljebb kettő; a mag tehát vagy egy kör, mint az *ábrán*, vagy pedig egy út. Remélem, a gráf szerkezete indokolja a furcsa elnevezések eredetét.

Mivel $(1; 21; 42) \rightarrow (1; 21; 2) \rightarrow (1; -15; 2)$ és ez a maghármak nincs benne az $(5; 13; 42)$ osztályának magjában (*ábra*), azért $(1; 21; 42) \not\sim (5; 13; 42)$.

Ezzel ismét megoldottuk az **A. 376.** feladatot.

Feladat. Írjuk le az $(1; 21; 42)$ osztályának a gráfját. Mi lesz a mag?

Érdekes még elidőzni egy kicsit a mag szerkezeténél. Minden maghármakban van egy szám, amelynek előjele különbözik a másik kettőtől: az *ábrán* ezek (vastagon szedve) a következők: 5, -3, 10, -7, 9, -6. Ezek a számok rendre 3, 5, 1, 1, 1, 2-ször fordulnak elő a magban ebben a sorrendben. Ez a számsorozat nem más, mint $\tilde{L}(13; 5; 42)$, a

már látott $(3; 5; 1; 1; 1; 2)$ lánc törtperiódus! Szemléletesen szólva a lánc törtjek jegyei valamilyen „útleírást” adnak meg: hogyan menjünk le a héjról a magig, majd ott körbe-körbe; ennek részletesebb vizsgálatát az Olvasóra hagyjuk.

Említettük, hogy a mag lehet út is. Erre akkor kerül sor, ha találunk benne egy elsőfokú csúcsot. Ekkor persze van a magban egy másik elsőfokú csúcs is, az út másik végpontja. Ennek az egyszerű észrevételnek nagyon hasznos következményei lehetnek:

Feladat. *a)* Legyen $p = 4k - 1$ alakú prím. Mutassuk meg, hogy az $x^2 - py^2 = 2$ vagy az $x^2 - py^2 = -2$ egyenletek valamelyikének van egész x, y megoldása. (Segítség: az $(1; -(p-1); -p)$ az út egyik végpontja, mi a másik? Használjuk a 2. tételt a cikk első részéből.)

b) Mit mondhatunk, ha $p = 4k + 1$ alakú prím?

Visszatekintés

Azt hiszem, tanulságos, hogy egy egyszerű „játék” vizsgálata hogyan vezetett el a másodfokú diofantikus egyenletek elméletéhez. A **B. 3822.** és az **A. 376.** feladatok megoldására tett kísérleteink során több megközelítés is kínálkozott: mozgósítottuk a periodikus lánc törtjek elméletét, valamint a gráfelmélet eszközeit is. Noha egyszerű észrevételeken múlt, a kapott gráfok szerkezetének a leírása igen hatásos eszköznek bizonyult. A rengeteg feladat talán mutatja, hogy közel sem mondtam el mindent, amit erről a témakörrel tudni lehet; aki kedvet kap a további kutatáshoz, maga is biztosan találhat érdekes új eredményeket, vagy újszerű bizonyítást egy-egy már ismert tételre.

Köszönöm *Pataki Jánosnak* értékes észrevételeit.