

A tavalyi pontverseny utolsó feladatai között a májusi számunkban tűztük ki a **B. 3822.** és az **A. 376.** feladatokat. Mindkettő egy számhármason definiált különös eljárásra vonatkozott. Ebben a cikkben a feladatok háttérét szeretném bemutatni. Remélem, kiderül, hogy a feladatokban megadott eljárás nagyon is eleven kapcsolatban van a számelmélet egy gazdag fejezetével, a másodfokú diofantikus egyenletek elméletével.

B. 3822. Az $(a; b; c)$ számhármassal egy lépésben a következőt lehet tenni: tetszőlegesen felcserélhetjük a számokat, vagy lecserélhetjük az $(a; b; 2a + 2b - c)$ számhármásra. El lehet-e jutni ilyen lépésekkel a $(2; 5; 13)$ számhármastól az $(1; 3; 8)$ számhármassá?

A továbbiakban az $(a; b; c) \rightsquigarrow (x; y; z)$ jelölést használjuk arra, hogy a fenti lépésekkel az $(a; b; c)$ számhármastól el lehet jutni az $(x; y; z)$ számhármassá. Természetesen $(a; b; c) \rightsquigarrow (a; b; c)$, továbbá ha $(a_1; b_1; c_1) \rightsquigarrow (a_2; b_2; c_2)$ és $(a_2; b_2; c_2) \rightsquigarrow (a_3; b_3; c_3)$, akkor $(a_1; b_1; c_1) \rightsquigarrow (a_3; b_3; c_3)$. Vegyük észre, hogy

$$(a; b; 2a + 2b - (2a + 2b - c)) = (a; b; c);$$

a számok felcserélését és ezen második műveletet is el lehet végezni „visszafelé”. Így ha $(a_1; b_1; c_1) \rightsquigarrow (a_2; b_2; c_2)$, akkor $(a_2; b_2; c_2) \rightsquigarrow (a_1; b_1; c_1)$. A $\rightsquigarrow$ ekvivalenciareláció; ekvivalenciaosztályokra bontja a számhármasonokat, a feladat pedig azt kérdezi, hogy az $(1; 3; 8)$ és a $(2; 5; 13)$ számhármasonok azonos ekvivalenciaosztályokban vannak-e. Az **A. 376.** feladat ugyanezt a kérdést teszi fel az $(1; 21; 42)$ és $(5; 13; 42)$ számhármasonokról.

Néhány észrevétel

A továbbiakban *invariánsokat* keresünk: olyan jellemzőket, amelyek egy lépés során nem változnak meg. Ha egy ilyen invariáns „értéke” két számhármasonra különböző, akkor az egyikből nem lehet eljutni a másikba, különböző ekvivalenciaosztályban vannak. Triviális példa a számhármasonok tagjainak egész volta: egy lépés során egészekből álló számhármastól csak egészekből álló számhármast kaphatunk, így például az $(1; 2; 3)$ -ból nem juthatunk el az $(\frac{1}{2}; \sqrt{2}; \pi)$ vagy az $(\frac{1}{2}; 1; 1)$ számhármassá. Ez az invariáns azonban egyik feladatot sem oldja meg, túl gyenge. Ígéretesebbnek tűnhet a számhármasonok elemeinek a legnagyobb közös osztója. (Gondoljuk meg, hogy – ha eltekintünk az előjelektől – akkor ez valóban invariáns.) A kitűzött feladatokban sajnos ez a legnagyobb közös osztó minden esetben 1, tehát ez az invariáns sem segít. Annyit azért érdemes megjegyeznünk, hogy mivel az adott lépések, illetve a számhármasonok tagjainak egy adott egészszel való szorzása felcserélhető, $(a_1; b_1; c_1) \rightsquigarrow (a_2; b_2; c_2)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(ka_1; kb_1; kc_1) \rightsquigarrow (ka_2; kb_2; kc_2)$. Így – ha kényelmes – föltehető, hogy számhármasonaink legnagyobb közös osztója 1. Most viszont mutatunk egy ravaszabb invariánst.

I. megoldás a B. 3822. feladatra. Tekintsük az $a + b$, $a + c$, $b + c$ számokat és legyen $f((a; b; c))$ az ezen számok közül a hárommal oszthatók száma. Ha felcseréljük a számokat, akkor f értéke természetesen nem változik. Megmutatjuk, hogy a második művelet esetén sem változik!

$f((a; b; 2a + 2b - c))$ az $a + b$, $3a + 2b - c$, $2a + 3b - c$ számok közül a 3-mal oszthatók száma, de $3 \mid (3a + 2b - c)$ pontosan akkor, ha $3 \mid b + c$, hiszen

$$3a + 2b - c \equiv -(b + c) \pmod{3}.$$

Tehát f értéke nem változik a lépések során, ugyanakkor $f((1; 3; 8)) = 1$, míg $f((2; 5; 13)) = 2$, hiszen az első esetben csak $3 \mid 1 + 8$ teljesül, míg a második esetben $3 \mid 2 + 13$ és $3 \mid 5 + 13$.

A két számhármason tehát különböző ekvivalenciaosztályban van, így a $(2; 5; 13)$ számhármastól nem lehet eljutni az $(1; 3; 8)$ számhármassá.

Ez az invariáns sajnos nem oldja meg az **A. 376.** feladatot: $f((1; 21; 42)) = f((5; 13; 42)) = 1$. Mivel $f((1; 3; 8)) = 1$, az sem derül ki, hogy $(1; 21; 42) \rightsquigarrow (1; 3; 8)$ vagy $(5; 13; 42) \rightsquigarrow (1; 3; 8)$ teljesül-e. A következő invariáns segítségével viszont sikerül majd „szétválasztanunk” a **B.** feladat számhármasonait az **A.** feladat számhármasonaitól.

II. megoldás a B. 3822. feladatra. Tekintsük a következő kifejezést:

$$n(a; b; c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = (a - b)^2 - c(2a + 2b - c).$$

Az első alakból látszik, hogy $n(a; b; c)$ invariáns a számok felcserélésére; a másodikból pedig az, hogy a második műveletre is. Mivel $n(2; 5; 13) = -4$ és $n(1; 3; 8) = 4$, azért a $(2; 5; 13)$ számhármastól nem juthatunk el az $(1; 3; 8)$ számhármassá. Öröm az örömben, hogy az **A. 376.** feladatot még mindig nem sikerült megoldanunk: $n(1; 21; 42) = n(5; 13; 42) = 316$. Annyi mindenesetre kiderült, hogy a **B.** feladat számhármasonaiból az **A.** feladat egyik számhármasonába sem lehet eljutni.

A számhármasonok normája

Alakítsuk át a fenti $n(a; b; c)$ kifejezést!

$$\begin{aligned} n(a; b; c) &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \equiv \\ &\equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Tehát $4 \mid n(a; b; c)$ pontosan akkor, ha $2 \mid a + b + c$. Ebben az esetben

$$N(a; b; c) = \frac{1}{4}n(a; b; c) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = \left(\frac{a + b - c}{2}\right)^2 - ab.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $2 \mid a + b + c$, akkor $ab + N(a; b; c)$ négyzetszám. Így például ha $(1; 3; 8) \rightsquigarrow (a; b; c)$, akkor $ab + N(a; b; c) = ab + N(1; 3; 8) = ab + 1$ négyzetszám (és a szimmetria miatt persze $bc + 1$ és $ca + 1$ is négyzetszámok). Hasonlóan, ha $(2; 5; 13) \rightsquigarrow (x; y; z)$, akkor $xy + N(x; y; z) = xy + N(2; 5; 13) = xy - 1$ (valamint $yx - 1$ és $zx - 1$) négyzetszám.

Ha $2 \mid a + b + c$, akkor hívjuk az $N(a; b; c)$ mennyiséget az $(a; b; c)$ számhármass *normájának*. Vegyük észre, hogy $2 \mid a + b + c$ invariáns, egy – páros összegű számhármassokból álló – ekvivalenciaosztályon belül tehát nyugodtan beszélhetünk $N(a; b; c)$ -ről. Ha például igaz volna a megfordítás, tehát hogy egyenlő normájú számhármassok ekvivalensek is, akkor ebből igenlő válasz következne az **A. 376.** feladatra. A továbbiakban $n(a; b; c)$ -vel számolunk majd, de eredményeinket $N(a; b; c)$ -re fogalmazzuk meg: így elegánsabb formába írhatók.

Szükségünk lesz arra, hogy c -t kifejezzük a , b , $N(a; b; c)$ segítségével. Nyilván

$$c = a + b \pm 2\sqrt{ab + N(a; b; c)}.$$

A korábbiak szerint a fenti kifejezésben négyzetszám áll a gyökjel alatt. Mint látható, egy számhármass két tagja a normával együtt sem határozza meg egyértelműen a harmadik elemet: két lehetőség adódik.

A következő önmagában is érdekes lemma olyan számhármassokról szól, amelyek normája nulla. Ilyen persze a $(0; 0; 0)$, amivel nem sokra megyünk, a legegyszerűbb nem triviális példa a $(0; 1; 1)$.

1. lemma. $(0; 1; 1)$ -ből csak $(x^2; y^2; (x + y)^2)$ alakú számhármassokba juthatunk el.

Bizonyítás. Látszólag kitüntetett szerepe van a harmadik koordinátának, valójában $(x + y)^2 = (- (x + y))^2$, így azt is írhatjuk, hogy $(0; 1; 1)$ -ből csak az $(u^2; v^2; w^2)$ alakú számhármassokba lehet eljutni, ahol $u + v + w = 0$. Az nyilvánvaló, hogy két elem cseréje nem változtatja meg az alak jellegét, nincs kitüntetett szerepe a harmadik koordinátának.

Mivel $2x^2 + 2y^2 - (x + y)^2 = (x - y)^2$, így a második lépést végrehajtva az $(x^2; (-y)^2; (x - y)^2)$ számhármast kapjuk, ami láthatóan a kívánt alakú. Mivel a kezdeti $(0; 1; 1) = (0^2; 1^2; 1^2)$ is ilyen, azért minden lépés után az $(x^2; y^2; (x + y)^2)$ alakú számhármassok körében maradunk. $\square$

A látottak szerint nyugodtan végrehajthatjuk az $(a; b; c) \rightarrow (a; 2a + 2c - b; c)$ és az $(a; b; c) \rightarrow (2b + 2c - a; b; c)$ lépéseket is, hiszen ezek összerakhatók két cseréből és egy második fajta műveletből. A harmadik koordinátának tehát nincsen semmilyen kitüntetett szerepe.

Vegyük észre azt is, hogy transzformációink lineárisak, azaz ha $(a; b; c) = (a_1; b_1; c_1) + (a_2; b_2; c_2)$ akkor

$$(a; b; 2a + 2b - c) = (a_1; b_1; 2a_1 + 2b_1 - c_1) + (a_2; b_2; 2a_2 + 2b_2 - c_2),$$

ahol koordinátánként adunk össze. Ugyanígy végezhetjük „tagonként” a koordináták felcserélését is, ügyelve arra, hogy ugyanazokat a cseréket hajtsuk végre a felbontásban szereplő számhármassokban.

Aratás

Tegyük egy kitérőt és nézzük meg, hogy klasszikus számelméleti eredmények hogyan fogalmazhatók meg ebben a megközelítésben. Egy híres probléma, a két négyzet összegeként felírható számok jellemzésének kulcsa az alábbi

1. tétel. $n^2 + 1$ alakú szám minden pozitív osztója felírható két négyzetszám összegeként.

Bizonyítás. Ha $u \mid n^2 + 1$, akkor van olyan v pozitív egész, hogy $uv = n^2 + 1$. A döntő észrevétel az, hogy mostani jelöléseinkkel ez az egyenlőség azt jelenti, hogy

$$N(u; v; u + v + 2n) = -1.$$

Vizsgáljuk meg tehát az $N(a; b; c) = -1$ feltételt kielégítő számhármassokat! Az alábbi lemma azt mondja ki, hogy a -1 értékű norma lényegében egyetlen ekvivalenciaosztályt azonosít.

2. lemma. Ha $a > 0$ és $N(a; b; c) = -1$, akkor $(a; b; c) \rightsquigarrow (1; 1; 2)$, tehát ezek a számhármassok az $(1; 1; 2)$ ekvivalenciaosztályát alkotják.

Ilyen például a **B.** feladat $(2; 5; 13)$ számhármasa és valóban: ha mindig a legnagyobb számot cseréljük ki, akkor két lépésben: $(2; 5; \mathbf{13}) \rightarrow (2; \mathbf{5}; 1) \rightarrow (2; 1; 1)$.

A 2. lemma bizonyítása. Ha $N(a; b; c) = -1$, akkor $ab = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 + 1 > 0$, vagyis a, b, c egyszerre pozitív vagy negatív. A feltétel szerint $a > 0$, így mindhárom szám pozitív. Megmutatjuk, hogy $(a; b; c) \rightsquigarrow (1; 1; 2)$. Azt állítjuk, hogy ha a példához hasonlóan minden lépésben a legnagyobb számot cseréljük ki, akkor $a + b + c$ értéke nem nő és csak akkor nem csökken, ha az $(1; 1; 2)$ egy permutációjával van dolgunk. Mivel számaink pozitívak, az összegük is az; ha pedig ez az összeg lépésenként csökken, előbb-utóbb valóban el kell jutnunk az $(1; 1; 2)$ számhármashoz.

Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy $a \leq b \leq c$. A fentiek szerint ekkor c -t cseréljük ki $2a + 2b - c$ -re és azt kell bizonyítanunk, hogy $a + b + c \geq 3a + 3b - c$, vagyis $c \geq a + b$.

Ha $ab = 1$, azaz $a = b = 1$, akkor $c = a + b \pm 2\sqrt{ab - 1} = a + b = 2$, készen vagyunk. Megmutatjuk, hogy ha $ab > 1$ (és $a \leq b$), akkor a c -re adódó két érték kisebbike, $a + b - 2\sqrt{ab - 1} < b$. Így csak $c = a + b + 2\sqrt{ab - 1}$ lehetséges, tehát $c > a + b$, amit bizonyítani akartunk.

Állításunk ekvivalens az $a < 2\sqrt{ab - 1}$, azaz a négyzetre emeléssel kapott $a^2 < 4ab - 4 = ab + (3ab - 4)$ egyenlőtlenséggel. Feltevésünk szerint $a^2 \leq ab$, továbbá $ab > 1$ miatt $3ab - 4 > 0$. Innen pedig már leolvasható a bizonyítandó egyenlőtlenség. $\square$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $N(a; b; c) = -1$, $a > 0$ esetén $(a; b; c) \rightsquigarrow (1; 1; 2)$. A bizonyításból az is látszik, hogy ha $N(a; b; c) = -1$ és $a < 0$, akkor $(a; b; c) \rightsquigarrow (-1; -1; -2)$.

Térjünk most vissza az 1. tétel bizonyításához. Láttuk, hogy $N(u; v; u + v + 2n) = -1$ és így a 2. lemma szerint $(u; v; u + v + 2n) \rightsquigarrow (1; 1; 2)$. Ekkor $(1; 1; 2) \rightsquigarrow (u; v; u + v + 2n)$. Vegyük észre, hogy $(1; 1; 2)$ két nulla normájú számhármassal összegére bontható: $(1; 1; 2) = (1; 0; 1) + (0; 1; 1)$. Az 1. lemma szerint ezekből csak négyzetszámokat tartalmazó számhármassokba juthatunk el, így az $(1; 1; 2) \rightsquigarrow (u; v; u + v + 2n)$ út lépéseit a tagokra végrehajtva az

$$(u; v; u + v + 2n) = (x_1^2; y_1^2; (x_1 + y_1)^2) + (x_2^2; y_2^2; (x_2 + y_2)^2)$$

előállításunkat kapjuk, ahonnan $u = x_1^2 + x_2^2$, és ezt akartuk bizonyítani. $\square$

A 2. lemma algoritmusát elő is állít egy ilyen felbontást. Ha az $(u; v; u + v + 2n) \rightsquigarrow (1; 1; 2) = (1; 0; 1) + (0; 1; 1)$ út lépéseit fordított sorrendben hajtjuk végre az $(1; 0; 1)$ és a $(0; 1; 1)$ tagokból indulva, akkor megkapjuk az u (és persze a másik két koordináta) felbontását két négyzetszám összegére.

Példa. 34 | $13^2 + 1$, ugyanis $34 \cdot 5 = 13^2 + 1$. A megfelelő $(u; v; u + v + 2n)$ számhármassal $(34; 5; 34 + 5 + 2 \cdot 13) = (34; 5; 65)$. Ekkor

$$\begin{array}{rcccl} (34; 5; \underline{65}) & = & (9; 1; 16) & + & (25; 4; 49) \\ & \downarrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\underline{34}; 5; 13) & = & (9; 1; 4) & + & (25; 4; 9) \\ & \downarrow & \uparrow & & \uparrow \\ (2; 5; \underline{13}) & = & (1; 1; 4) & + & (1; 4; 9) \\ & \downarrow & \uparrow & & \uparrow \\ (2; \underline{5}; 1) & = & (1; 1; 0) & + & (1; 4; 1) \\ & \downarrow & \uparrow & & \uparrow \\ (2; 1; 1) & = & (1; 1; 0) & + & (1; 0; 1). \end{array}$$

Feladatok. (a) Bizonyítsuk be, hogy egy $n^2 + 2$ alakú szám minden osztója $a^2 + 2b^2$ alakú. (Segítség: $(1; 2; 3) = (1; 0; 1) + 2(0; 1; 1)$.)

(b) Bizonyítsuk be, hogy $k \mid n^2 + 5$ esetén k vagy $2k$ $a^2 + 5b^2$ alakú. (Segítség: Ekkor két osztály van. $(a; b; c) \rightsquigarrow (1; 5; 6)$ vagy $(?; ?; ?)$.)

(c) Legyen $(a; b; c) = 1$ és $N(a; b; c) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(a; b; c) \rightsquigarrow (0; 1; 1)$ vagy $(a; b; c) \rightsquigarrow (0; -1; -1)$.

I. megjegyzés. $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$. Hogy melyik felbontást találjuk meg, az $65 \mid n^2 + 1$ esetén n -től függ: $n = 8$ esetén az első, $n = 18$ esetén pedig a második.

II. megjegyzés. Tételünk egyszerű következményeként adódik az a látszólag erősebb állítás is, hogy ha $(a; b) = 1$, akkor $a^2 + b^2$ minden osztója előáll két négyzetszám összegeként. Két „standard” összefüggésből ugyanis nyomban adódik, hogy ha $(a; b) = 1$, akkor $a^2 + b^2$ -nek van $n^2 + 1$ alakú többszöröse. Ismeretes, hogy ha $(a; b) = 1$, akkor léteznek olyan s, t egészek, amelyekre $1 = as - bt$. Az *Euler–Lagrange azonosság* szerint ekkor

$$(a^2 + b^2)(s^2 + t^2) = (at + bs)^2 + (as - bt)^2 = (at + bs)^2 + 1.$$

Most a számhármások szétbontásán alapuló ötletünket fejlesszük tovább: legyen $(a; b; c) = (a_1; b_1; c_1) + (a_2; b_2; c_2)$. Ekkor

$$a^2 = a_1^2 - (a - a_1)^2 + 2a(a - a_1) = a_1^2 - a_2^2 + 2aa_2,$$

$$ab = a_1b_1 - (a - a_1)(b - b_1) + a(b - b_1) + b(a - a_1) = a_1b_1 - a_2b_2 + ab_2 + ba_2.$$

Tehát

$$(*) \quad n(a; b; c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = n(a_1; b_1; c_1) - n(a_2; b_2; c_2) - \\ - 2a(b_2 + c_2 - a_2) - 2b(a_2 + c_2 - b_2) - 2c(a_2 + b_2 - c_2).$$

Most ezt a kicsit furcsa, de igen hasznos azonosságunkat fogjuk felhasználni a következő tétel bizonyításában.

2. tétel. *Tegyük fel, hogy $2 \mid a+b+c$ és $(a; b; c) \rightsquigarrow (A; B; C)$. Ekkor léteznek u, v egészek, hogy $aA = u^2 - N(a; b; c)v^2$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a következő felbontáson alapul:

$$\begin{array}{ccccc} (a; b; c) & = & (a; b-1; c-1) & + & (0; 1; 1) \\ \wr & & \wr & & \wr \\ (A; B; C) & = & (A'; B'; C') & + & (x^2; y^2; (x+y)^2). \end{array}$$

Ekkor $n(A; B; C) = n(a; b; c)$, illetve a definíció szerint

$$\begin{aligned} n(A'; B'; C') &= n(a; b-1; c-1) = (b-c)^2 - a(2(b-1) + 2(c-1) - a) = \\ &= n(a; b; c) + 4a. \end{aligned}$$

Fennáll továbbá, hogy $n(x^2; y^2; (x+y)^2) = n(0; 1; 1) = 0$.

Alkalmazzuk a (*) azonosságot az $(A; B; C) = (A'; B'; C') + (x^2; y^2; (x+y)^2)$ felbontásra:

$$\begin{aligned} n(A; B; C) &= n(A'; B'; C') - n(x^2; y^2; (x+y)^2) - 2A((x+y)^2 + y^2 - x^2) - \\ &- 2B((x+y)^2 + y^2 - x^2) - 2C(x^2 + y^2 - (x+y)^2). \end{aligned}$$

Tehát $n(a; b; c) = n(a; b; c) + 4a - 2A(2y^2 + 2xy) - 2B(2x^2 + 2xy) - 2C(-2xy)$, vagyis $4(Ay^2 + (A+B-C)xy + Bx^2 - a) = 0$. Ez y -ra nézve másodfokú egyenlet, amelynek létezik egész megoldása, így a diszkriminánsa négyzetszám:

$$D = (A + B - C)^2 x^2 - 4A(Bx^2 - a) = n(A; B; C)x^2 + 4Aa.$$

Mivel $n(A; B; C) = 4N(A; B; C)$, azért $4s^2 = D = 4(N(A; B; C)x^2 + Aa)$, azaz $Aa = s^2 - N(A; B; C)x^2 = s^2 - N(a; b; c)x^2$.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást. $\square$

Végkifejlet

Ha $(1; 21; 42) \rightsquigarrow (5; 13; 42)$, akkor a 2. tétel szerint léteznek x, y egészek, hogy $x^2 - 79y^2 = 1 \cdot 5 = 5$. Megmutatható, hogy ennek a diofantikus egyenletnek nincs x, y egész megoldása és ezzel végre választ kaphatunk az **A. 376.** feladat kérdésére: az $(1; 21; 42)$ számhármásból nem lehet eljutni az $(5; 13; 42)$ számhármásba. Ennek részletesebb tárgyalásába nem megyünk bele, később úgy is látunk egy invariánst, amely végleg elintézi ezt a problémát.

Min múlik, hogy az $x^2 - 79y^2 = 5$ diofantikus egyenletnek nincs megoldása? Az egyenletet y^2 -tel osztva kapjuk, hogy $\frac{x^2}{y^2} = 79 + \frac{5}{y^2} \approx 79$, vagyis $\frac{x}{y} \approx \sqrt{79}$. Az $\frac{x}{y}$ racionális szám tehát nagyon jó „hatásfokú”, a nevező méretéhez képest kicsiny hibájú közelítése a $\sqrt{79}$ számnak.

Ilyen közelítések sorozata hatékony eljárásokkal állítható elő és ez a sorozat adott szám – mint esetünkben a $\sqrt{79}$ – esetén lényegében egyértelműen meghatározott. A fenti egyenlet megoldása pedig tagja kell legyen ennek a $\sqrt{79}$ -hez tartozó sorozatnak. Ennek persze végtelen sok eleme van, de ismeretes, hogy ha az $\frac{u}{v}$ elemekhez kiszámoljuk az $u^2 - 79v^2$ értékeket, akkor az így előálló számok halmaza már *véges*! Ha pedig ellenőrizzük ezeket az értékeket, kiderül, hogy az 5 nincs közöttük!

A most vázolt eszközök vezetnek el egy az itt leírtaknál finomabb invariánshoz. Erről szól majd a cikk folytatása

...