

A nyári mexikói diákolimpián kétségkívül a **3.** feladat bizonyult a legnehezebbnek. E számunk 388–390. oldalain olvasható *Paulin Roland* megoldása, amelyben egy kevésbé ismert eredmény, a *Muirhead-egyenlőtlenség*¹ alkalmazása volt a kulcslépés. Hogy az olvasó esetleges hiányérzetét enyhítsük, bemutatjuk a tételt működés közben. Az $n = 2, 3$ esetekben tulajdonképpen a bizonyítás is kiadódik, aki pedig járatos a magasabb dimenziókban, kaphat némi képet az általános esetről is.

A jó szem azért sem árt, mert a tétel különös feltételrendszere egy alapvetően *geometriai* konstrukció révén teszi lehetővé a *súlyozott számtani és mértani közepek* jól ismert egyenlőtlenségének (*SAG*) kiterjesztését általánosabb, szimmetrikus összegekre.

Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ tetszőleges pozitív számok és a nemnegatív $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ „súlyok” összege 1, akkor

$$(SAG) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Az egyenlőtlenség két oldalán az x_i számok λ_i súlyokkal vett számtani, illetve mértani közepe áll. Ha $\lambda_i = \frac{1}{n}$, akkor éppen a számtani, illetve mértani közepeket kapjuk. E két közép nevezetes egyenlőtlensége pedig a tétel jelöléseivel az

$$(1, 0, 0, \dots, 0) \succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \Rightarrow S(1, 0, 0, \dots, 0) \geq S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

alakot ölti.

Az olimpiai feladat megoldása során általános formában hangzott el a *Muirhead*-tétel, így ezt most nem ismételjük el. A jelöléseket illetően – is – javasoljuk a megoldás tanulmányozását. Az ott látottak szerint elhagyjuk a változók indexeit, a példákban ugyanis legfeljebb három változó szerepel majd. Ennek megfelelően az $S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ összegben az x, y, z változók összesen 6 permutációja vesz részt. Így például

$$S(6; 5; 1) = x^6 y^5 z + y^6 z^5 x + z^6 x^5 y + x^5 y^6 z + y^5 z^6 x + z^5 x^6 y.$$

Ugyanígy

$$S(7; 5; 0) = x^7 y^5 + y^7 z^5 + z^7 x^5 + x^5 y^7 + y^5 z^7 + z^5 x^7,$$

$$S(3; 3; 1) = 2(x^3 y^3 z + y^3 z^3 x + z^3 x^3 y).$$

Ha csak két változónk van, $n = 2$, akkor például $S(4; 1) = x^4 y + y^4 x$.

Síkban még minden látszik: az $n = 2$ eset

Bemelegítésül nézzük meg, hogyan juthatunk el a tétel szerint igaz $S(4; 1) \geq S(3; 2)$, azaz

$$(1) \quad x^4 y + y^4 x \geq x^3 y^2 + x^2 y^3$$

bizonyításához. (A változók értéke nem negatív, ezt a továbbiakban mindig föltesszük.) Az állítás persze „puszta kézzel” is elintézhető, de most álljunk ellen a kísértésnek. A $(4; 1) \succ (3; 2)$ feltétel nyilván teljesül: $4 + 1 = 3 + 2$ és $4 > 3$. A szereplő kifejezések szimmetriájának megfelelően adódó négy számpár természetes módon ábrázolható a koordinátarendszerben (*1. ábra*). A feltétel szerint az $A_1(4; 1)$, $A_2(1; 4)$, illetve a $B_1(3; 2)$, $B_2(2; 3)$ pontok ugyanazon az egyenesen vannak (ennek egyenlete $x + y = 5$), másfelől a B_i pontok az $A_1 A_2$ szakaszra esnek. Ekkor, a szokásos módon **p**-vel jelölve a P pont helyvektorát, léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ számok, amelyek összege 1, és például

$$(K_{12}) \quad \mathbf{b}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2.$$

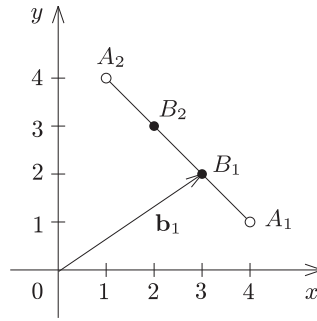
Hogy ne csak a levegőbe beszéljünk, a koordinátákra átvitt

$$(E_{12}) \quad 3 = 4\lambda_1 + \lambda_2, \quad 2 = \lambda_1 + 4\lambda_2$$

egyenletrendszer megoldása: $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

¹**Muirhead-egyenlőtlenség:** Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív valós számokra és $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ valós számokra legyen $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\pi \in S_n} x_{\pi(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\pi(n)}^{\alpha_n}$, ahol S_n az $\{1, 2, \dots, n\}$ permutációinak a halmaza.

Ha $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ olyan valós számok, amelyekre $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$, továbbá minden $0 < k < n$ esetén $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \beta_i$, akkor $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.



1. ábra

A mindent eldöntő észrevétel az, hogy ezek az egyenletek az (1) tagjainak *algebrai kapcsolatát* is kifejezik: ha a λ_1, λ_2 súlyokkal elkészítjük az (1) bal oldalán álló tagok, x^4y és xy^4 *súlyozott mértani közepét*, akkor ebben az x kitevője 3, az y -é pedig 2: éppen a jobb oldal első tagját kapjuk!

Ez pedig nem nagyobb a megfelelő súlyozott számtani középénél:

$$(SAG_{12}) \quad \frac{2}{3} \cdot x^4y + \frac{1}{3} \cdot xy^4 \geq (x^4y)^{\frac{2}{3}} \cdot (xy^4)^{\frac{1}{3}} = x^3y^2.$$

Szimmetriaokokból – szoktuk mondani ilyenkor – felírható (K_{21}) , (E_{21}) és így

$$(SAG_{21}) \quad \frac{1}{3} \cdot x^4y + \frac{2}{3} \cdot xy^4 \geq (x^4y)^{\frac{1}{3}} \cdot (xy^4)^{\frac{2}{3}} = x^2y^3.$$

Egyenlőtlenségeinket összeadva készen is vagyunk, ugyanis – micsoda szerencse! – az együtthatók összege, $\lambda_1 + \lambda_2$ „oszloponként” is 1!

Megjegyzések. 1. Gondoljuk meg, hányféle köntösben jelenik itt meg a szimmetria! Az (1)-ben szereplő kifejezések szimmetrikusak a változók, x és y cseréjére; a megfelelő ábrázolásban ez az A_1, B_1, B_2, A_2 ponthalmaz tengelyes szimmetriáját jelenti a 45° -os egyenesre. A vektor-, illetve koordinátákra vonatkozó egyenletek szintén a koordinátákat fölcserélve, végül a két egyenlőtlenség, (SAG_{12}) és (SAG_{21}) a változók cseréjével kapható egymásból.

2. Az első egyenlőtlenségből közvetlenül eljuthatunk a másodikhoz, ha felcseréljük a két változót. Ez úgy is megvalósítható, ha (SAG_{12}) jobb oldalán a változók helyett az együtthatókat cseréljük fel.

Vegyük észre, hogy a bizonyításnak nincs szüksége arra, hogy mekkorák a λ_i súlyok! Annyi kell „csupán”, hogy ne legyenek negatívak, az összegük 1 legyen, és hogy ... létezzenek!

1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\alpha_1, \alpha_2) \succ (\beta_1, \beta_2)$, akkor az A_1A_2 intervallum tartalmazza a B_1B_2 intervallumot. (Lehetséges, hogy az intervallumok egyetlen ponttá zsugorodnak; mikor?)

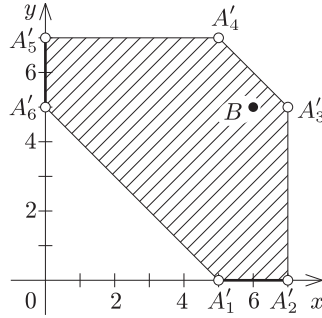
A tér a síkból nézve: az $n = 3$ eset

Az olimpiai feladat megoldásában többek között szerepel az $S(7; 5; 0) \geq S(6; 5; 1)$ egyenlőtlenség, most ennek járunk utána. Három változónk van, a számhármásoknak megfelelő pontok a *térbeli* koordinátarendszerben ábrázolhatók. A változóknak, illetve egy pont koordinátáinak – szemben a síkbeli két lehetőséggel – most hatféle sorrendje, vagy *permutációja* van. Jelöljük három elem hat permutációjának halmazát a szokásos módon S_3 -mal, az egyes permutációkat pedig görög kisbetűkkel. Ha $\sigma \in S_3$ például fölcseréli az első két elemet, akkor az A_σ pont koordinátái $(5; 7; 0)$. A síkbeli utat követve most nem az A_1, A_2 , hanem a hatelemű $\mathcal{A} = \{A_\pi : \pi \in S_3\}$ és $\mathcal{B} = \{B_\pi : \pi \in S_3\}$ ponthalmazokat kapjuk az $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$, illetve a $(\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ számhármásokból a koordináták permutálásával.

Gondoljunk meg először néhány apróságot, amelyek a síkban nyilvánvaló módon teljesültek.

I. állítás. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ponthalmazok benne vannak egy közös síkban. Ez nyomban következik abból, hogy a pontok koordinátáinak összege 12, így valamennyien illeszkednek az $x + y + z = 12$ egyenletű síkra.

II. állítás. Az A_π pontok egy *konvex* hatszög csúcsai. Ha ugyanis van olyan sík, amelyen egy térbeli $\overline{\mathcal{S}}$ sokszöglemez vetülete egy konvex sokszöglemez, akkor $\overline{\mathcal{S}}$ két konvex halmaz, egy konvex végtelen hasáb és egy sík közös része, így maga is konvex. A 2. ábra az A_π csúcsok merőleges vetületét mutatja az xy koordinátasíkon: a hatszög láthatóan konvex.



2. ábra

Általában is ez a helyzet, ha az α_i számok páronként különbözők. (Ha a koordináták között két egyenlő van, akkor háromszöget kapunk, ha mindhárom egyenlő, akkor pedig egyetlen pontot.) Természetesen hasonló igaz a B_π pontokra is. A továbbiakban jelölje $\overline{\mathcal{A}}$, illetve $\overline{\mathcal{B}}$ a megfelelő térbeli sokszöglemezeket. A II. állítás szerint $\overline{\mathcal{A}}$ nem más, mint az $\mathcal{A}$ halmaz *konvex burka* és hasonló igaz a $\overline{\mathcal{B}}$ halmazra is.

2. feladat. Legyen $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Adjuk meg az $\overline{\mathcal{A}}$ csúcsainak a sorrendjét az $A_i(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ csúcsból indulva az origó felől nézve pozitív körüljárásban. (ι az identikus permutáció.)

III. állítás. $B_i = B(6; 5; 1) \in \overline{\mathcal{A}}$. Ez megint leolvasható a 2. ábráról: a $B'(6; 5)$ pont a $B_i(6; 5; 1)$ pont vetülete az xy -síkon és a vetülethatszög belsejében van. A B' -n keresztül a vetítés irányával párhuzamos egyenes tehát a végtelen hasáb belsejében halad és a B -ben metszi az $\overline{\mathcal{A}}$ síkját.

3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) \succ (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$, akkor $B(\beta_1; \beta_2; \beta_3) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Ismeretes, hogy egy véges $\{P_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ ponthalmaz konvex burka a

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{p}_m$$

helyvektorú pontok összessége, ahol $\lambda_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. A III. állítás szerint tehát **léteznek** a nemnegatív λ_π számok, amelyek összege 1 és

$$(K) \quad \mathbf{b} = \sum_{\pi \in S_3} \lambda_\pi \mathbf{a}_\pi.$$

A koordinátákra nézve ez azt jelenti, hogy a

$$(E_i) \quad (6; 5; 1) = \lambda_1(7; 5; 0) + \lambda_2(5; 7; 0) + \lambda_3(0; 7; 5) + \lambda_4(0; 5; 7) + \lambda_5(5; 0; 7) + \lambda_6(7; 0; 5)$$

egyenletnek **létezik** nemnegatív számokból álló megoldása, mégpedig olyan, ahol a λ számok összege 1! Ez a megoldás most is valamiféle „katalizátor” szerepét játssza majd, magukra a λ értékekre nem lesz szükség! Ekkor ugyanis – ahogyan ez (SAG_{12}) esetében történt – az (E_i) egyenlet azt mondja el, hogy $S(7; 5; 0)$ hat tagjának a λ_i súlyokkal vett mértani közepében az x kitevője 6, az y -é 5, a z kitevője pedig 1; (SAG) szerint tehát

$$(SAG_i) \quad \lambda_1 x^7 y^5 + \lambda_2 x^5 y^7 + \lambda_3 y^7 z^5 + \lambda_4 y^5 z^7 + \lambda_5 x^5 z^7 + \lambda_6 x^7 z^5 \geq x^6 y^5 z.$$

A három változót (SAG_i) -ban minden lehetséges módon permutálva összesen hat hasonló egyenlőtlenséget kapunk. Ezeket összeadva a jobb oldalon éppen $S(6; 5; 1)$ adódik. Geometriailag ennek az felel meg, hogy az $\overline{\mathcal{A}}$ halmaz mind a hat B pontot tartalmazza, de ennél többről van szó: a $\overline{\mathcal{B}}$ és az $\overline{\mathcal{A}}$ halmazoknak ugyanazok a szimmetriái: a hat permutáció! Emiatt az egyes B pontok ugyanezen szimmetriák szerint függenek *algebrailag* az A pontoktól. Ha a bal oldalakon a λ számok sorrendjét rögzítjük, akkor a változók permutációi során az $x^7 y^5$ tag – de a többi is – különböző együtthatók mellett bukkan fel: végül begyűjti mind a hatot. Így pedig a hat súlyozott számtani közép összegében minden egyes tag együtthatója $\lambda_{\pi_1} + \dots + \lambda_{\pi_6} = 1$. A hat egyenlőtlenség összegének bal oldalán tehát éppen $S(7; 5; 0)$ áll. Így működik a Muirhead-egyenlőtlenség!

4. feladat. Bizonyítsuk be a cikkben igazolt $S(7; 5; 0) \geq S(6; 5; 1)$ állítás „felét”, tehát hogy $x^7 y^5 + y^7 z^5 + z^7 x^5 \geq x^6 y^5 z + y^6 z^5 x + z^6 x^5 y$.

5. feladat. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a^3(b+c)} +$

$$\frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

6. feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Felhasznált irodalom

- [1] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University Press (2004).