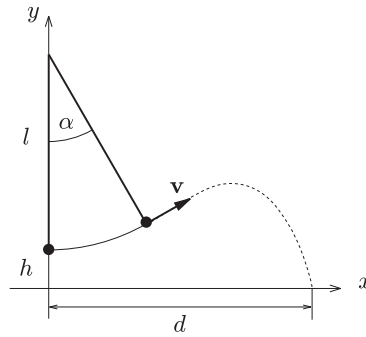


Egy alkalommal, amikor e cikk egyik szerzőjének kislánya¹ a játszótéren hintázott, a következő kérdést tette fel: „Apa, hol kell kiugranom a hintából, hogy a legmesszebbre ugorjak?” Ez a kérdés látszólag egyszerű, egy 10 éves kislány is megfogalmazhatja. A válasz azonban már korántsem ilyen egyszerű. Pontosabban szólva, a (tömegpontnak tekintett) kislány mozgását középiskolai ismeretek alapján le tudjuk írni, ez nem látszik bonyolult feladatnak. A nehézség abból adódik, hogy a kapott eredményből csak *numerikusan* tudjuk meghatározni, hogy mikor érdemes kiugrani a hintából. (A tényleges kiugrásról – annak veszélyessége miatt – természetesen le kell beszéljünk a kisgyerekeket, de a probléma fizikáján érdemes elgondolkodnunk.)

Sokan ismerik azt a tényt, hogy a különböző szögekben, de azonos kezdősebességgel elhajított kövek közül az esik a legmesszebbre, amelyiket a vízszinteshez képest 45° -os szögben hajítunk el. Természetesen ebben az esetben feltételezzük, hogy a közegellenállást elhanyagolhatjuk, és a mozgás homogén gravitációs térben történik. A „hintás” probléma és az elhajított kő között az a különbség, hogy a két esetben más a kezdőfeltétel. Ezért nem is várhatjuk, hogy akkor kell kiugrani a hintából, amikor a hinta kitérése éppen 45° . Tegyük fel, hogy hintázás közben kialakul egy periodikus mozgás, és ekkor a hinta egy bizonyos maximális szögig lendül ki. Megmutatjuk, hogy a kiugrás „optimális” szöge (amelynél a legmesszebb érünk a talajra) függ a nyugvó helyzetben lévő hintának a talajtól számított távolságától, és attól, hogy a kiugrás előtt a hinta periodikus mozgása során mekkora a hinta legnagyobb kitérésének a szöge. Látni fogjuk, hogy a fenti két paraméter függvényében ennek az optimális kiugrási szögnek is van egy felső korlátja. Ennél nagyobb szögben semmi esetre sem érdemes kiugrani a hintából, ha a lehető legmesszebb akarunk a talajra érni. Meglepő módon, ez a szög csak néhány fokkal kisebb a fent említett 45° -nál.

A hintából való kiugrást modellezzük egy ingára erősített test mozgásával, amikor az inga fonala egy pillanatban elszakad! Ebben a közelítésben feltesszük, hogy a test pontszerű, és az ingát matematikai ingának tekintjük. Az *1. ábrán* az l hosszúságú inga fonálára kötött test mozgása látható, amikor a fonal α szögnél elszakad. A test mozgását a kiugrás előtt ingamozgással, a kiugrás után ferde hajítással írhatjuk le. Tegyük fel, hogy az inga maximális kitérésének a szöge a fonál elszakadása előtt α_0 , és az inga nyugalmi helyzetében a test h magasságban van a talaj fölött! Nyilvánvalóan $\alpha \leq \alpha_0$ és $h \geq 0$. A test az *1. ábrán* bejelölt d távolságban ér talajt.



1. ábra

A fonal elszakadásakor, azaz amikor az inga kitérése α , a test v sebességének nagyságát az energiamegmaradásból számíthatjuk ki:

$$(1) \quad v = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0)},$$

és a $\mathbf{v}$ sebességvektor iránya α szöget zár be az x tengellyel. A fonal elszakadása után a test a ferde hajításnak megfelelően mozog. A kezdősebességet a fenti képlet adja, a hajítás szöge a vízszinteshez képest pedig α . A fonal elszakadásától számított t idő múlva a test koordinátái (az *1. ábrán* felvett koordináta-rendszerben):

$$(2) \quad x = l \sin \alpha + vt \cos \alpha,$$

$$(3) \quad y = h + l(1 - \cos \alpha) + vt \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Jelöljük t_0 -al azt az időt, amennyi idő múlva a test a talajra érkezik, azaz amikor $y(t_0) = 0$. Ebből a feltételből a ferde hajítás során eltelt t_0 időre egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldása:

$$(4) \quad \frac{t_0}{\sqrt{2l/g}} = p \sin \alpha + \sqrt{p^2 \sin^2 \alpha + 1 - \cos \alpha} + \frac{h}{l}, \quad \text{ahol}$$

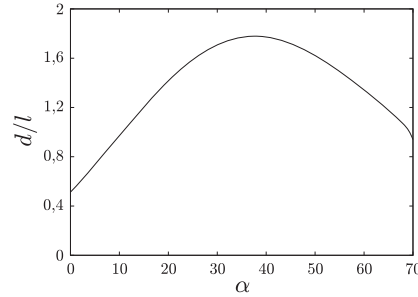
$$(5) \quad p = \sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}.$$

¹Glöckler Lili.

Ebben a pillanatban a talajra érkezés távolsága: $d = x(t_0)$, és a (2) és (4) egyenletek felhasználásával a következő eredményt kapjuk:

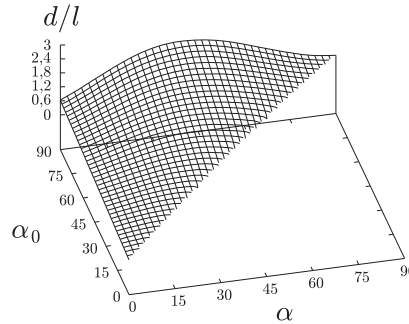
$$(6) \quad \frac{d(\alpha)}{l} = \sin \alpha + 2p \cos \alpha \left(p \sin \alpha + \sqrt{p^2 \sin^2 \alpha + 1 - \cos \alpha + \frac{h}{l}} \right),$$

ahol p -t az (5) egyenletben definiáltuk. A d távolság az inga l hosszának egységében mérve csak az α és α_0 szögektől, illetve a h/l aránytól függ, és a $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ esetben van értelmezve. A 2. ábra a d távolság α szögtől való függését mutatja adott α_0 szög és h/l magasság mellett. Jól látható az ábrából, hogy $d(\alpha)$ -nak maximuma van egy bizonyos $\alpha = \alpha^*$ értéknél. A numerikus számításból a 2. ábra paramétereivel $\alpha^* = 37,6^\circ$ adódik.

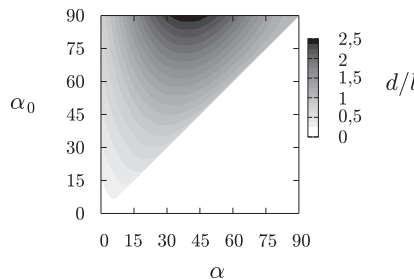


2. ábra

Vajon találunk-e maximumot más h/l , illetve α_0 értékek mellett is? Erre a 3. ábra ad választ, ahol a d távolságot ábrázoltuk az α és α_0 szögek függvényében, rögzítve h/l mellett. Látható, hogy a kapott felületen bármely állandó α_0 szögnek megfelelő vonalon haladva mindig egy maximumon kell átmenni. A 3. ábrának $\alpha_0 = 70^\circ$ -nál vett „metszete” látható a 2. ábrán. A felület a $(0; 0)$ pontból indul, emelkedő „hegyháthoz” hasonlít. Mivel a d távolság három mennyiségnek a függvénye, csak olyan felületeket tudunk ábrázolni, amelyeknél a három változó közül egyet mindig rögzítünk. A d távolság további vizsgálatából kiderül, hogy a felület hasonló módon viselkedik nagyobb h/l aránynál is, csak még meredekebb a hegyhát. A felület jellegét a 4. ábrán látható „domborzati térkép” segítségével is tanulmányozhatjuk (az egyes árnyalatok különböző d/l értékeknek felelnek meg). Az árnyalatok gyorsabb változása meredekebb „emelkedőt” jelent.



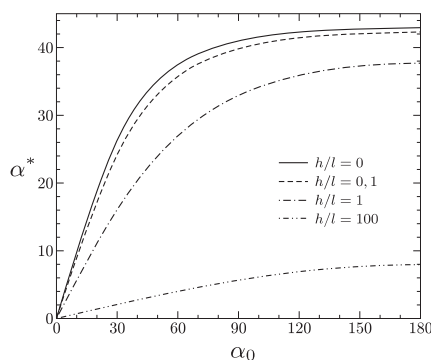
3. ábra. A d távolságnak (l egységeken mérve) az α és α_0 szögektől való függése rögzített $h/l = 0,1$ mellett. A szögeket fokokban mértük



4. ábra. A 3. ábra „domborzati térképe”. A szögeket fokokban mértük

Megállapíthatjuk, hogy a talajra érkezés d távolsága valóban maximumot vesz fel egy bizonyos α^* értéknél, ami természetesen függ a h/l , illetve α_0 paraméterektől. A $d(\alpha)$ függvény maximumának α^* helyét a függvény α szerinti

deriváltjának zérushelyéből számolhatjuk ki. A (6) képlettel adott $d(\alpha)$ deriváltja meglehetősen bonyolult függvény, amelynek zérushelyét csak numerikusan tudjuk kiszámítani. Az eredmény az 5. ábrán látható, ahol az α^* szögnek α_0 -tól való függését ábrázoltuk különböző h/l arányok mellett. A számítást kiterjesztettük arra az esetre is, amikor az inga (pontosabban a hinta) akár $\alpha_0 = 180^\circ$ -ig is kilendülhet. Az ábra alapján látható, hogy az α^* szög az α_0 szög monoton növekvő függvénye. Kis α_0 szögekre meglehetősen gyors a függvény változása, míg nagyobb α_0 értékekre a függvény „laposabb”. Az is világos az ábrából, hogy h növelésével α^* csökken, maximumát, $\alpha^* \approx 42,94^\circ$ -ot pedig $h = 0$ és $\alpha_0 = 180^\circ$ -nél veszi fel. Ha a hintával csak legfeljebb $\alpha_0 = 90^\circ$ -ig tudunk kilendülni, akkor a legnagyobb ugráshoz tartozó kiugrási szög felső korlátja $\alpha^*(\alpha_0 = 90^\circ, h = 0) \approx 40,99^\circ$.



5. ábra. Az α^* szögnek az α_0 szögtől való függése $h/l = 0; 0,1; 1; 100$ magasságok mellett. A szögeket fokokban mértük

Összefoglalva a következő megállapításokat tehetjük. A hintából való kiugrás optimális szöge erősen függ attól, hogy nyugalomban a hinta milyen magasan van a talajhoz képest (pontosabban ezen magasság és az inga hosszának arányától), illetve, hogy hintázás közben mekkora a hinta legnagyobb kitérésének a szöge. Az optimális szöget csak numerikusan tudjuk meghatározni, ezért hintázás közben nehéz gyors választ adni a bevezetőben feltett kérdésre. Ami biztos, hogy ez az optimális szög nem lehet nagyobb 43° -nál. Meglepő módon ez a szög csak 2° -kal kisebb a ferde hajításnál ismert optimális szögnél.

Végül talán érdemes megjegyezni, hogy a fizikán túl van egy másik, nagyon fontos tanulság is. Figyeljünk oda, hogy mit kérdeznek a gyermekeink, diákjaink! Tanulhatunk tőlük.

Köszönetünket szeretnénk kifejezni *Tichy Gézának* és *Kormányos Andornak* a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért.