

A szerkesztőségnek tömördek munkája van. Arra kéri olvasóit, segítsenek a munkában: döntsék el, közölnék-e a lapban az alábbi két feladatot, illetőleg az alábbi megoldással közölnék-e.

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n}{a + a^2 + \dots + a^{n-1}} \geq \frac{n+1}{n-1},$$

ha $a > 0$ és n 1-nél nagyobb természetes szám.

Megoldás: A számtani közép nem kisebb a mértani középénél. Ezt a számlálóban, majd a nevezőben álló számokra felhasználva

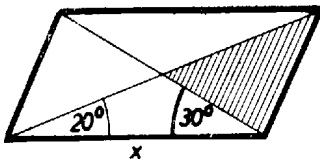
$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n &\geq (n+1) \sqrt[n+1]{1 \cdot a \cdot a^2 \dots a^{n-1} \cdot a^n}, \\ a + a^2 + \dots + a^{n-1} &\geq (n-1) \sqrt[n+1]{a \cdot a^2 \dots a^{n-1}} \end{aligned}$$

Mindkét oldalon pozitív mennyiségek állnak, tehát a két egyenlőtlenség hányadosát véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{a + a^2 + \dots + a^{n-1}} &\geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{a^{1+2+\dots+n}}}{\sqrt[n+1]{a^{1+2+\dots+(n-1)}}} = \\ &= \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{a^{\frac{(n+1)n}{2}}}}{\sqrt[n+1]{a^{\frac{(n-1)n}{2}}}} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{a^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}} = \frac{n+1}{n-1}. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenséget igazoltuk.

2. feladat. Egy paralelogramma területe 100 cm^2 . A négyszöget átlói négy háromszögre bontják, amelyek közül kettő-kettő egybevágó. Az egyik háromszög területe 20 cm^2 . A másik (vele nem egybevágó háromszögben szereplő paralelogramma-oldalon nyugvó két szög 30° , ill. 20° . Milyen hosszú az említett paralelogramma-oldal?



Megoldás: A paralelogrammát egy átlója két egybevágó háromszögre bontja, így egy ilyen háromszög területe 50 cm^2 . A másik átló meghúzásával ez két újabb háromszögre bomlik; mivel egyik területe 20 cm^2 , a másiké 30 . Ha a kérdéses paralelogramma-oldalt x -szel jelöljük, az x oldalból és a három ismert szögből – 20° , 30° , ill. $180^\circ - (20^\circ + 30^\circ) = 130^\circ$ – a háromszög területe ismert képlet alapján meghatározható:

$$\frac{x^3 \sin 20^\circ \sin 30^\circ}{2 \sin 130^\circ} = 30.$$

Ebből:

$$x = \sqrt{\frac{60 \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ \sin 30^\circ}}.$$

A kérdéses paralelogramma-oldalt kiszámítottuk. Ebből a szögfüggvényértékeket logaritmustáblából kikeresve s a műveleteket elvégezve x számértékét közelítőleg is megkaphatjuk.

– Harmadik feladatként oldjuk meg a következőt:

3. A világűr rakéta a Marsba érkezik. Az utasok egy iskolát látogatnak meg. Egy üres tanterem tábláján befejezetlen szorzás-példát látnak:

$$\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}$$

Megértik a vonaldarabok számából, hogy a befejezetlen művelet arab számokkal:

$$\frac{177 \cdot 6}{5}$$

A marslakók számrendszerének, úgy látszik, nem 10 az alapszáma. Gondolkozni kezdenek, hogy akkor mi lehet. Gondolkozzunk mi is, és fejezzük be a szorzást

*

A megoldások beküldésének feltételei ugyanazok, mint a többi kitűzött feladatnál. Mindhárom feladat *külön* példának számít. A mindhármat beküldők közül a legjobb 50 megoldás szerzőinek nevét közöljük. Ezek közül a három legszabatosabban indokolt megoldás beküldői könyvjutalomban részesülnek. Ezenkívül vigaszdíjak sorshúzás alapján azok közt, akik legalább egy feladatot helyesen oldottak meg.