E lap olvasói a számtani és mértani közép fogalmával már a kötelező iskolai anyag keretein belül megismerkedtek, és e lap hasábjain volt más közepekről is szó (Aczél-Surányi: „Egyenlőtlenségek” III. évf. 1–2–3–4. szám). Idézett cikkben előfordult már a súlyozott számtani közép fogalma is.

A következő törtet nevezzük az a és b pozitív számok, m és n pozitív súlyokkal súlyozott, számtani közepének:

$$\frac{ma+nb}{m+n}. \tag{1}$$

E fogalom magában foglalja a közönséges számtani közép fogalmát $m=n$ esetén. Ha $a=b$, úgy a súlyozott számtani közép ezt a közös értéket veszi fel: $\dfrac{ma+nb}{m+n}=a$. Ha a különbözik b-től, legyen pl. $a<b$, úgy a súlyozott számtani közép e két érték közé esik.

$$a<\frac{ma+nb}{m+n}<b. \tag{2}$$

A (2)-ben szereplő első egyenlőtlenség pl. úgy látható be, hogy az (1) tört számlálójában b helyébe a nála kisebb a-t helyettesítjük. Ezzel az eljárással csökkentettük a tört értékét és eredményül a-t kaptunk. Hasonlóan bizonyítható az egyenlőtlenség második fele is. A (2)-es egyenlőtlenség egy alkalmazásaként vizsgáljuk azt a közepet, amelyet a „rossz diák” kap gyakran eredményül, amikor két törtet kellene összeadnia. Mindenki találkozott már olyan diákkal, aki úgy adott össze két törtet, hogy külön a számlálókat, külön a nevezőket összeadta, vagyis a $\dfrac{p}{q}$ és $\dfrac{r}{s}$ törtekből $\left(\text{ahol } \dfrac{p}{q}\leq\dfrac{r}{s}\right)$ összegük helyett a $\dfrac{p+r}{q+s}$ törtet alkotta. Az ilyen összeadás helytelenségét nem kell a cikk olvasói előtt bizonygatni, hiszen könnyen belátható, hogy a $\dfrac{p+r}{q+s}$ tört kisebb, mint a két összeadandó közül a nagyobbik, pontosabban, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{p}{q}\leq\frac{p+r}{q+s}\leq\frac{r}{s}. \tag{2'}$$

A $(2')$ egyenlőtlenség nyilvánvaló következménye a (2) egyenlőtlenségnek, amit könnyen ellenőrizhetünk, ha a (2)-ben a helyébe $\dfrac{p}{q}$-t, b helyébe $\dfrac{r}{s}$-et, az m helyébe q-t és n helyébe s-et helyettesítünk.

Ugyancsak a (2), illetve a $(2')$ egyenlőtlenség következménye a következő egyszerű tétel. Ha egy pozitív valódi tört számlálójához és nevezőjéhez ugyanazt a pozitív számot hozzáadjuk, úgy az adott valódi törtnél nagyobb valódi törtet kapunk, míg, ha egy áltört számlálójához és nevezőjéhez adjuk hozzá ugyanazt a pozitív számot, úgy az adott áltörtnél kisebb áltörtet kapunk.

$$\frac{p}{q}<\frac{p+a}{q+a}<1,\quad \text{ha}\quad 0<\frac{p}{q}<1,$$

és

$$\frac{P}{Q}>\frac{P+B}{Q+B}>1,\quad \text{ha}\quad \frac{P}{Q}>1.$$

Az első esetben a $\dfrac{p}{q}$ és az $\dfrac{a}{a}=1$ törtekből, a második esetben a $\dfrac{P}{Q}$ és a $\dfrac{B}{B}=1$ törtekből képeztünk a $(2')$-ben adott módon közepet, ami egyben állításunk bizonyítását jelenti.

Hasonlítsuk most össze az a és b egymástól különböző pozitív számokból különböző súlypárokkal képezett súlyozott számtani közepeket.

Legyen $0<a<b$, és az m, n és M, N súlyok ugyancsak legyenek pozitívok. Megmutatjuk, hogy az e két súlypárral képezett közép között akkor és csak akkor teljesül

$$\frac{ma+nb}{m+n}<\frac{Ma+Nb}{M+N} \tag{3}$$

egyenlőtlenség, ha

$$\frac{m}{n}>\frac{M}{N}. \tag{4}$$

Osszuk a (3) egyenlőtlenségben szereplő első törtben a számlálót és nevezőt n-nel, a másodikban N-nel. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul

$$\frac{\frac{m}{n}a+b}{\frac{m}{n}+1}<\frac{\frac{M}{N}a+b}{\frac{M}{N}+1}. \tag{3'}$$

(2)-ből (azt az $\frac{M}{N}$, 1 súlyokra alkalmazva) következik, hogy $a < \frac{\frac{M}{N}a + b}{\frac{M}{N}+1}$. Tehát minden olyan x számra, amelyet úgy kapunk, hogy a-nak és $\frac{\frac{M}{N}a + b}{\frac{M}{N}+1}$-nek tetszőleges pozitív súlyokkal súlyozott számtani közepét képezzük, igaz (2) alapján az $x < \frac{\frac{M}{N}a + b}{\frac{M}{N}+1}$ egyenlőtlenség.

Az a súlyának válasszuk az $\frac{m}{n} - \frac{M}{N}$ különbséget, amely a (4) feltevés következtében pozitív, míg $\frac{\frac{M}{N}a + b}{\frac{M}{N}+1}$-et saját nevezőjével, $\left(\frac{M}{N}+1\right)$-gyel súlyozzuk:

$$x = \frac{\left(\frac{m}{n} - \frac{M}{N}\right)a + \left(\frac{M}{N}+1\right)\frac{\frac{M}{N}a + b}{\frac{M}{N}+1}}{\left(\frac{m}{n} - \frac{M}{N}\right) + \left(\frac{M}{N}+1\right)} = \frac{\frac{m}{n}a + b}{\frac{m}{n}+1}.$$

Az előbbi megjegyzésünk szerint azonban

$$x = \frac{\frac{m}{n}a + b}{\frac{m}{n}+1} < \frac{\frac{M}{N}a + b}{\frac{M}{N}+1},$$

ami a $(3')$ egyenlőtlenség, és avval együtt a (3) egyenlőtlenség bizonyítását jelenti.

Ha (4) helyett az ellenkező értelmű egyenlőtlenség érvényes, akkor a bizonyítás $\frac{m}{n}$ és $\frac{M}{N}$ felcserélésével alkalmazható, s így $(3')$, ill. (3) helyett is a fordított értelmű egyenlőtlenséget nyerjük. A (4) feltétel tehát nemcsak elégséges, hanem szükséges is (3) teljesüléséhez.

A (3) egyenlőtlenség alkalmazásaképpen több ismert nevezetes egyenlőtlenséget vezetünk le belőle. Előbb azonban még két középérték fogalmával kell olvasóinkat megismertetnünk.

Az $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n$ 0-tól különböző számok H *harmonikus közepén* reciprokaik számtani középértékének reciprokát értjük, azaz

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}}.$$

Eszerint a és b harmonikus közepe

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Az $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ számok Q *négyzetes (kvadratikus) közepén* négyzeteik számtani közepéből vont pozitív előjelű négyzetgyökét értjük, vagyis

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Tehát a és b kvadratikus közepe

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

I. alkalmazás: Legyen $n = \sqrt{b}$, $n = \sqrt{a}$, $M = N = 1$.

Ebben az esetben teljesül a (4) feltétel, tehát (3) felhasználásával (a két oldalt felcserélve)

$$\frac{a+b}{2} > \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \sqrt{ab},$$

ami a számtani és mértani közép közti jól ismert egyenlőtlenség.

II. alkalmazás: Legyen $m = b$, $n = a$, $M = N = 1$.

A (4) feltétel teljesül, és így

$$\frac{a+b}{2} > \frac{ba+ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b},$$

ami a számtani közép és a harmonikus közép közti egyenlőtlenség.

III. alkalmazás: Legyen $m = b$, $n = a$, $M = \sqrt{b}$, $N = \sqrt{a}$.

A (4) feltétel teljesül, hiszen $\frac{b}{a} > \sqrt{\frac{b}{a}}$, és így

$$\frac{ba+ab}{a+b} < \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}},$$

vagyis

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab},$$

ami a harmonikus közép és a mértani közép közti egyenlőtlenség.

IV. alkalmazás: Legyen $m = n = 1$, $M = a$, $N = b$.

A (4) feltétel teljesül, és így

$$\frac{a+b}{2} < \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{a+b}{2}$-vel szorozva, majd mindkét oldalból négyzetgyököt vonva, az

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami pedig a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség.

Az itt megadott négy példával természetesen nem merítettük ki a (3) egyenlőtlenség összes alkalmazásait. Mindenki származtathat belőle további egyenlőtlenségeket, ha az m, n és M, N súlyok helyébe a feltételeket kielégítő konkrét pozitív mennyiségeket helyettesít.