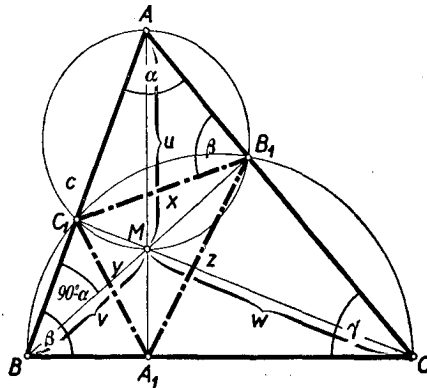


A magasságvonalak talppontja által meghatározott háromszög, az ún. talpponti háromszög igen sok érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Leghíresebb az a régóta ismert tulajdonsága, hogy a háromszögbe írt háromszögek közül a legkisebb kerületű (ld. a Fejér-féle bizonyítást az I. gimnáziumi tankönyvben 332 – 334. old.). Háromszögszerkesztés szempontjából is sok érdekességet nyújt. Jelen dolgozatban a talpponti háromszög adatait hozzuk összefüggésbe az eredeti háromszög adataival.

1. Egyelőre hegyesszögű háromszögről lesz szó. Jelöljük az eredeti ABC háromszög szögeit α, β, γ -val, e szögekkel szemben fekvő oldalakat a, b, c -vel, az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek ezen oldalakkal szemben fekvő oldalai legyenek rendre $B_1C_1 = x, C_1A_1 = y, A_1B_1 = z$ (ld. az ábrát).



BCB_1C_1 húrnégyszög, s így

$$AB_1C_1 \sphericalangle = ABC \sphericalangle = \beta.$$

Az ABC és AB_1C_1 háromszögek két szögben (α és β) megegyeznek, tehát hasonlóak. Következésképpen

$$\frac{x}{a} = \frac{AB_1}{AB} = \cos \alpha$$

vagyis (mindjárt felírva a hasonló képleteket y és z -re is)

$$(I) \quad x = a \cos \alpha, \quad y = b \cos \beta, \quad z = c \cos \gamma$$

2. Jelöljük az ABC_{Δ} magassági pontját M -mel, és legyenek az MA, MB, MC szakaszok rendre u, v, w .

A Thales-tétel alapján az AB_1MC_1 négyszög, valamint a BC_1B_1C négyszög húrnégyszög. Egy r sugarú kör $h (< 2r)$ húrja és a húr egyik végpontjából kiinduló átmérő által alkotott derékszögű háromszögből

$$(1) \quad h = 2r \sin \varepsilon, \quad \text{vagyis} \quad 2r = \frac{h}{\sin \varepsilon},$$

ahol ε a húrhoz tartozó hegyes kerületi szög.

Az AB_1MC_1 húrnégyszög köré írt kör átmérője $MA = u$, és így a $C_1B_1 = x$ húrra alkalmazva az (1) összefüggést

$$(2) \quad u = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

(1)-ből

$$(3) \quad a = \frac{x}{\cos \alpha}$$

(2)-t osztva (3)-mal, nyerjük, hogy

$$\frac{u}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cotg \alpha.$$

Ha r -rel jelöljük az ABC_{Δ} köré írt kör sugarát, akkor (1) alapján $a = 2r \sin \alpha$, és így (mindjárt felírva a v és w -re adódó analóg formulákat is)

$$\begin{aligned} u &= a \cotg \alpha = 2r \cos \alpha, \\ v &= b \cotg \beta = 2r \cos \beta, \\ w &= c \cotg \gamma = 2r \cos \gamma. \end{aligned}$$

3. Az ABC_{Δ} területe (T) összevethető a BCM, CAM és ABM háromszögek területeinek összegéből. Az $ABC_{\Delta} AA_1, BB_1, CC_1$ magasságait rendre m_a, m_b, m_c -vel jelölve

$$a(m_a - u) + b(m_b - v) + c(m_c - w) = 2T,$$

amiből

$$au + bv + cw = am_a + bm_b + cm_c - 2T = 6T - 2T = 4T.$$

Ha (II)-ből u, v, w értékeit behelyettesítjük, nyerjük, hogy

$$2r(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) = 4T,$$

vagyis

$$(III) \quad 2T = r(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) = r(x + y + z) = rk,$$

ahol k jelenti a talpponti háromszög kerületét.

Ismeretes, hogy K -val jelölve az ABC_Δ , kerületét és ϱ -val a beírt kör sugarát

$$(4) \quad K\varrho = 2T,$$

és így (III) és (4) egybevetéséből

$$kr = K\varrho,$$

vagyis

$$(IV) \quad \frac{k}{K} = \frac{\varrho}{r}.$$

4. A cosinus-tétel alapján

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

vagyis a $K = 2s$ jelölést bevezetve

$$(5) \quad \begin{aligned} 1 + \cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s \cdot 2(s-a)}{2bc}. \end{aligned}$$

Innen

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Másrészt

$$(6) \quad \begin{aligned} 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \\ &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{2(s-b)2(s-c)}{2bc}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \text{hasonlóképpen} \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\ \sin \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned}$$

Mivel (1) alapján $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$, így

$$(7) \quad T = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{abc}{4r}, \quad \text{ahonnan} \quad r = \frac{abc}{4T}.$$

Tehát felhasználva Heron képletét

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{T^2}{sabc} = \frac{T}{abc},$$

ahonnan (4), (7) és (IV) figyelembevételével

$$(V. 1) \quad \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{T \varrho}{4Tr} = \frac{\varrho}{4r} = \frac{k}{4K}.$$

(7) és (IV) felhasználásával

$$(V. 2) \quad \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc} = \frac{sT}{abc} = \frac{s}{4r} = \frac{K}{8r} = \frac{k}{8\varrho}.$$

(V. 1) és (V. 2) osztásából

$$(V. 3) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s} = \frac{2\varrho}{K}.$$

5. Érdekes módon hozható kapcsolatba a talpponti háromszög oldalaival az az arány, amely a magassági pontnak a csúcstól való távolsága és az egész magasságvonal hossza között fennáll. Ugyanis

$$\frac{u}{m_a} = \frac{a \cotg \alpha}{m_a} = \frac{a^2 \cotg \alpha}{am_a} = \frac{\frac{a}{\sin \alpha} \cdot a \cos \alpha}{2T} = \frac{2rx}{2T},$$

tehát

$$(VII) \quad \frac{u}{m_a} = \mu_a = \frac{r}{T}x, \quad \frac{v}{m_b} = \mu_b = \frac{r}{T}y, \quad \frac{w}{m_c} = \mu_c = \frac{r}{T}z,$$

Innen

$$x : y : z.$$

Továbbá (III) figyelembevételével

$$\mu_a + \mu_b + \mu_c = \frac{r}{T}(x + y + z) = \frac{rk}{T} = \frac{2T}{T} = 2.$$

Ebből nyilvánvaló, hogyha két magasságvonalon ismeretes az osztási arány, akkor a talpponti háromszöghöz hasonló talpponti háromszög, ebből pedig az eredeti hegyesszögű háromszöghöz hasonló háromszög szerkeszthető.

6. Egyébként k igen érdekesen fejezhető ki az ABC_{Δ} oldalaival. (5) és (6) alapján

$$(VIII) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \alpha = a \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = a \frac{s(s-a) - (s-b)(s-c)}{bc} = \\ &= a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \frac{4s(s-a) - 2bc}{2bc} = \frac{2a^2s(s-a) - a^2bc}{abc}. \end{aligned}$$

A betűk ciklikus felcserélésével hasonló formulákat nyerünk y -ra és z -re, és így

$$(IX) \quad \begin{aligned} k = x + y + z &= \frac{2s[a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c)] - abc(a+b+c)}{abc} = \\ &= \frac{2s[a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) - abc]}{abc}. \end{aligned}$$

Mivel $2s = K$, azért

$$\frac{k}{K} = \frac{s(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 1.$$

2-vel szorozva

$$\frac{2k}{k} = \frac{2s(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 2,$$

ahonnan (4) figyelembevételével

$$(X) \quad \begin{aligned} \frac{2k}{K} + 2 &= \frac{2\varrho}{r} + 2 = \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} = \\ &= \frac{ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 - a^3 - b^3 - c^3}{abc} = \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a^2}{bc} \right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} - \frac{b^2}{ac} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} - \frac{c^2}{ab} \right). \end{aligned}$$

Egyenlő szárú háromszög esetén, ha $a = b$, (X)-ből

$$\frac{2k}{K} + 2 = \frac{2\varrho}{r} + 2 = \left(1 + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}\right) + \left(1 + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{2c}{a} - \frac{c^2}{a^2}\right)$$

ahonnan

$$(XI) \quad \frac{k}{K} = \frac{\varrho}{r} = \frac{c}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{a^2} = 2\frac{c}{2a} - 2\left(\frac{c}{2a^2}\right)^2 = 2\sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

7. (1) alapján

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{K} = \frac{\frac{a}{2r} + \frac{b}{2r} + \frac{c}{2r}}{K} = \frac{a+b+c}{2rK} = \frac{1}{2r},$$

vagyis (IV) figyelembevételével

$$(XII) \quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{K}{2r} = \frac{k}{2\varrho}.$$

(V. 1) és (V. 2) 8-szoros szorzata

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 8\frac{k}{4K} \cdot \frac{K}{8r},$$

vagyis

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{k}{4r}.$$

(XII) és (XIII) hányadosa

$$(XIV) \quad \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2r}{\varrho},$$

8. Felhasználva a

$$(8) \quad \varrho \leq \frac{r}{2}$$

ismert egyenlőtlenséget (ld. jelen számunkban a 744. sz. kitűzött feladatot) (IV)-ből következik

$$(IV') \quad \frac{k}{K} \leq \frac{1}{2},$$

továbbá (III) és (IV') alapján

$$4T = 2rk \leq 2r\frac{K}{2} = rK,$$

amiből

$$(III') \quad \frac{r}{4} \geq \frac{T}{K}.$$

Végül (XIV)-ből – (8) figyelembevételével – következik

$$(XIV') \quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

A (IV'), (III'), (XIV') egyenlőtlenségekben az egyenlőség jele csak szabályos háromszög esetén érvényes.

9. Eddig tulajdonképpen csak hegyesszögű háromszögről beszéltünk, bár több általánosan érvényes tételt felhasználtunk és levezettünk.

Derékszögű háromszög esetén a talpponti háromszög egyenessé fajul, tehát háromszögről, mint olyanról, nem beszélhetünk.

Tompaszögű háromszögre mindenekelőtt megállapítjuk, hogy ugyanahhoz a talpponti háromszöghöz mindig tartozik egy hegyesszögű és három tompaszögű háromszög. Pl. ábránkban az AMB , BMC és CMA tompaszögű háromszögeknek ugyancsak az $A_1B_1C_1$, a talpponti háromszögük. Azonkívül mindhárom tompaszögű háromszög köré írt körének sugara megegyezik a ABC_Δ köré írt kör r sugarával. (Ez következik a Vályi-féle tételből. L. 332. sz. gyakorlatot a múlt számunkban.)

Tehát az $A_1B_1C_{1\Delta}$ talpponti háromszöge az u , v , c oldalú BAM_Δ -nek, amelynek szögei rendre $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$, $\alpha + \beta$. De (3) alatt láttuk, hogy

$$x = u\sin\alpha = u\cos(90^\circ - \alpha).$$

Ugyanígy

$$y = v \sin \beta = v \cos(90^\circ - \beta).$$

(1)-ből

$$z = c \cos \gamma = -c \cos(\alpha + \beta).$$

Tehát tompaszögű háromszög esetén a (I) képletekben a tompaszöggel szembenfekvő oldalt negatív előjellel kell venni. Ezek szerint egy a_1, b_1, c_1 , oldalú és $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ szögű háromszög talpponti háromszögének kerülete, ha $\gamma_1 > 90^\circ$,

$$k_1 = a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 - c_1 \cos \gamma_1.$$

Amíg a talpponti háromszög kerület-képlete tompaszögű háromszög esetén megváltozik, addig az eredeti háromszög területének (III) képlete:

$$2T_1 = r_1(a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 + c_1 \cos \gamma_1)$$

változatlan marad, amint azt az alábbiakban megmutatjuk.

$$\begin{aligned} 2t_{AMB} &= 2t_{ABC} - 2t_{BMC} - 2t_{CMA} = 2T - a(m_a - u) - b(m_b - v) = \\ &= 2T - 2T + au - 2T + bv = au + bv - 2T = \\ &= r(2a \cos \alpha + 2b \cos \beta - a \cos \alpha - b \cos \beta - c \cos \gamma) = \\ &= r(a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma). \end{aligned}$$

Másrészt alkalmazzuk most a (III) képletet az AMB_Δ -re

$$\begin{aligned} (a_1 = u, b_1 = v, c_1 = c, \quad \alpha_1 = 90^\circ - \alpha, \quad \beta_1 = 90^\circ - \beta, \quad \gamma_1 = \alpha + \beta \quad r_1 = r) \\ 2t_{AMB} = r[u \cos(90^\circ - \alpha) + v \cos(90^\circ - \beta) + c \cos(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

(II) figyelembevételével

$$2t_{AMB} = r(a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma).$$

Ezzel igazoltuk állításunkat.

Nem érvényes természetesen tompaszögű háromszögre a (IV)

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{k_1}{K_1}$$

képlet. Igaz marad ugyan – amint láttuk – a

$$K_1 \varrho_1 = 2T_1 = r_1(a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 + c_1 \cos \gamma_1),$$

azaz a

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 + c_1 \cos \gamma_1}{K_1}$$

összefüggés, csak hogy most a jobboldal számlálóját nem egyenlő k_1 -gyel.

A többi összefüggés vizsgálatát már ezek alapján az olvasóra bízunk.