

Ha a tömegpont előírt pályán mozog, kényszermozgásról beszélünk. A kényszermozgás tárgyalása vagy úgy történik, hogy a ható erőknek a pálya irányába eső komponensével számolunk, tehát a ható erőt és a *kényszert* együtt vesszük figyelembe, vagy úgy, hogy olyan erőt keresünk, amely a ható erővel együtt éppen a gyorsító erőkomponenst adja. Ekkor tehát a kényszert a kényszererő felvételével vesszük számításba. A kényszererőt a pálya rugalmas erői létesítik és iránya kifelé mutat.

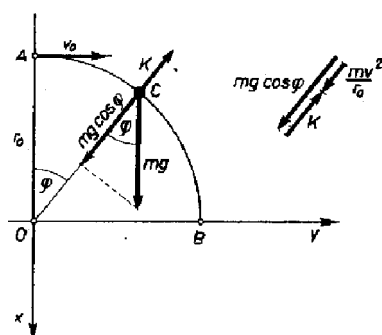
A kényszererő a pályára mindig merőleges, ha mozgást akadályozó erő nincs, ezért a tárgyalások egyszerűsítése céljából a súrlódástól és közegellenállástól eltekintünk.

A kényszermozgásra példaképpen többnyire a lejtőn esést, az egyenletes körmozgást és az ingamozgást szoktuk említeni. Ezek a mozgás folyamán meg is maradnak kényszermozgásnak. Ez arra a téves gondolatra vezethet, hogy egy mozgás vagy szabad, vagy kényszermozgás.

A következőkben be fogjuk mutatni a függőleges elhelyezésű körpályán történő mozgásnak, mint változó sebességű körmozgásnak két esetét. Mint látni fogjuk, az elsőben a kényszererő állandóan csökken, sőt egy ponton 0-vá lesz, és így a mozgás szabaddá válik.

## 1.

Legyen tehát a pálya kör alakú, függőleges helyzetű, félkör keresztmetszetű vályú, amely kifelé nyitott. Ebben a legmagasabb  $A$  pontból indítjuk el a tömegpontot reprezentáló gömböt, kezdősebesség nélkül, vagy  $v_0$  kezdősebességgel.



1. ábra

A tömegpontra mozgás közben két erő hat: a gravitációs erő, mely függőlegesen lefelé irányul, és a pályára merőleges, kifelé mutató  $K$  kényszererő. A pályára merőleges komponenseik eredője a körpályán való tartáshoz szükséges centripetális erőt kell, hogy kiadja. Ha pozitív irányúnak a középpont felé mutató irányt vesszük fel (tehát ilyenkor a  $K$  kényszererő negatív előjelű!)

$$(1) \quad \frac{mv^2}{r_0} = mg \cos \varphi + K \quad \text{lesz.}$$

Tehát

$$(2) \quad K = \frac{mv^2}{r_0} - mg \cos \varphi.$$

Például: a legfelső pontban ( $\varphi_0 = 0^\circ$ ), kezdősebesség nulla,  $K_0 = -mg$ , tehát a mozgó pont súlya, negatív előjellel.

A negatív előjel annyit jelent, hogy ez az erő kifelé mutat. Ha a mozgás folyamán  $v$  nő, a kifelé mutató kényszererő állandóan csökken. Egy időpillanatban  $K$  0-vá lesz, és a mozgás szabaddá válik.

A kényszermozgás feltétele tehát a (2) alapján

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{mv^2}{r_0} - mg \cos \varphi &< 0, \\ v^2 &< r_0 g \cos \varphi. \end{aligned}$$

A mozgás szabad, ha

$$(3a) \quad v^2 \geq r_0 g \cos \varphi.$$

a) Ha a kezdősebesség 0 és  $\varphi = 0$ , azaz a kezdőpontban (3) mindig teljesül, mert  $0 < r_0 g$ , és kényszermozgás kezdődik. A mozgás folyamán  $v$  nő, a  $\cos \varphi$  csökken, ezért a  $\varphi = \varphi_1$  helyen  $K = 0$ -vá lesz, a mozgás szabaddá válik. Ekkor a mozgás sebessége

$$(3b) \quad v_1^2 = r_0 g \cos \varphi_1.$$

b) Ha a kezdősebesség  $v_0 \neq 0$ , és teljesül

$$(4a) \quad v_0^2 < r_0 g, \quad \text{akkor}$$

kényszermozgás esete áll fenn. Ha viszont a kezdősebesség nagy, és

$$(4b) \quad v_0^2 \geq r_0 g,$$

a mozgás szabad, körmozgásról nem beszélhetünk, a pont vízszintes hajítást végez. Most állapítsuk meg azt a  $\varphi_1$  szöveget, amelynél a mozgás szabaddá válik, ha (4a) teljesül.

A függőleges körmozgás esetében az energiatétel

$$(5) \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgr_0 \cos \varphi = E.$$

Az  $E$  energiaállandót a kezdőállapot határozza meg, amelyben a sebesség  $v_0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgr_0 = E.$$

Így

$$(6) \quad \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + mgr_0(\cos \varphi - 1) = 0.$$

A mozgás szabaddá válásának feltétele (3b) szerint  $v_1^2 = r_0 g \cos \varphi_1$ .

Behelyettesítve

$$(7) \quad \begin{aligned} r_0 g \cos \varphi_1 - v_0^2 + 2r_0 g(\cos \varphi_1 - 1) &= 0, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3r_0 g}. \end{aligned}$$

A jobboldal nyilvánvalóan mutatja, hogy  $\cos \varphi_1$  legkisebb, tehát a  $\varphi_1$  szögelfordulás legnagyobb, ha  $v_0 = 0$ . Kezdetből szabad a mozgás, ha

$$(7a) \quad 1 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3r_0 g}, \quad v_0^2 = r_0 g,$$

megegyezésben (4b)-vel.

Most még számítsuk ki a  $\varphi_1$  szöghöz tartozó sebességet!

A (6) alapján, ha (7)-et is figyelembe vesszük:

$$(8) \quad v_1^2 = v_0^2 + 2gr_0(1 - \cos \varphi_1) = \frac{1}{3}[2gr_0 + v_0^2].$$

Végezzünk számításokat azokban az esetekben, amikor  $v_0 = 0$ ,  $v_0 = 150 \text{ cm sec}^{-1}$ , és ha  $v_1 = v_0$ . A mi kísérleteinkben  $r_0 = 50 \text{ cm}$  volt.

Az eredményt az I. táblázatban foglaljuk össze:

| $v_0$<br>cm sec <sup>-1</sup> | $v_1$<br>cm sec <sup>-1</sup> | $\varphi_1$ |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------|
| 0                             | 180                           | 48°10'      |
| 150                           | 200                           | 20°         |
| 221,5                         | 221,5                         | 0°          |

1. táblázat

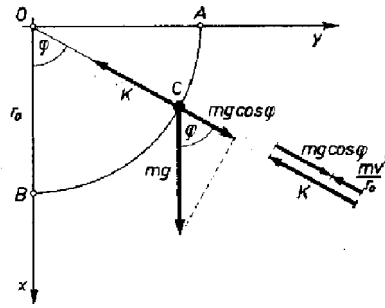
$v_0$  jelenti a kezdősebességet,  $v_1$  azt a sebességet, amelynél a mozgás szabaddá lesz,  $\varphi_1$  a  $v_1$  sebességhez tartozó szögelfordulás.

Figyeljük meg  $v_1$  növekedését (a határsebességhez), ha  $v_0$  0-tól a határsebességig nő. (A  $180 \text{ cm sec}^{-1}$  sebesség [első sor] azonos azzal a sebességgel, mintha a pont a lejtő magasságán át szabadon esett volna.)

## II.

A függőleges körmozgás másik esete legyen a (2) ábra szerint. A kör alakú vályú felülről nyitott. A kezdőpont legyen a legfelső  $A$  pont. A potenciális energiát  $B$  pontban tekintsük 0-nak. Tehát  $C$  pontban

$$E_p = mr_0 g - mr_0 g \cos \varphi.$$



2. ábra

Legyen most a kifelé mutató irány pozitív. Ekkor a mozgó pontra ható erők így írhatók fel:

$$-\frac{mv^2}{r_0} = K + mg \cos \varphi,$$

és így

$$(9) \quad K = -mg \cos \varphi - \frac{mv^2}{r_0}.$$

A negatív jel azt jelenti, hogy ez az erő  $O$  felé mutat. Ha a kezdősebesség,  $v_0 = 0$ ,  $A$  pontban  $K = 0$ , tehát a mozgás, mint esés kezdődik, és mint kényszermozgás folytatódik. A mozgás folyamán  $v$  állandóan nő, tehát  $K = 0$  nem lehet. Ez a változó sebességű körmozgás mindig kényszermozgás marad.

Írjuk fel az energiatételt:

$$(10) \quad \frac{1}{2}mv^2 + mr_0g - mr_0g \cos \varphi = E.$$

Ha a kezdősebesség  $v_0$  ( $\varphi = 90^\circ$  esetében)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mr_0g = E,$$

és

$$(10a) \quad \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) - mr_0g \cos \varphi = 0.$$

a) Engedjük el a mozgó pontot kezdősebesség nélkül ( $v_0 = 0$ ). Az a pálya végéhez akkora sebességgel érkezik, mintha  $r_0$  magasságból szabadon esett volna, ui. (10a)-ból, ha  $v_0 = 0$  és  $\varphi = 0^\circ$

$$(11) \quad v^2 = 2r_0g.$$

Ugyanez a helyzet, ha a sebességet a pálya tetszőleges  $\varphi$  szöghöz tartozó pontjában vizsgáljuk, ui.  $r_0 \cos \varphi$  a szabadesséssel megtett utat jelenti.

b) Legyen  $v_0 > 0$ . Ekkor a végsebesség

$$v^2 = 2r_0g + v_0^2.$$

*Megjegyzés:* A kísérletek a levezetett eredményekhez képest kisebb eltéréseket mutatnak, mivel a súrlódást nem vettük számításba. Mi a súrlódást azzal is csökkentettük, hogy a pálya sugaránál nagyobb sugarú gömbbel végeztük a kísérleteket, azaz a gömb a körpálya peremén haladt lefelé.

**Dr. Tóth Lajos**  
egyetemi tanár