

A Bolyai János Matematikai Társulat az idén is megrendezte az IMK szokásos téli ankétját 1978. december 27-én és 28-án.

A találkozón a következő előadások hangzottak el:

Pósa Lajos: Matematikai logikai kérdések.

Surányi János: Húr- és érintőnégyszögek.

Prékopa András: Lineáris programozás.

December 27-én du. a résztvevők feladatmegoldással foglalkoztak.

Az IMK téli ankétjának feladatai és megoldásai

1. α és β jelentsen olyan hegyesszöget, amelyre $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{27}}$ és $\sin \beta = \sqrt{\frac{3}{28}}$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha + \beta = 30^\circ$.

Megoldás. Ha β hegyesszög, akkor $0 < \cos \beta < 1$, ezért $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ alapján $\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{3}{28}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$, vagyis $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Ezekből $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ -t ki tudjuk számítani:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mivel α és β hegyesszög, ezért $\alpha + \beta$ 0° és 180° közé esik. Ebben az intervallumban pedig 30° az egyetlen olyan érték, amelynek a tangense $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tehát $\alpha + \beta = 30^\circ$.

2. Az ABC szabályos háromszög AB , ill. CA oldalán vegyük fel azt a C' , ill. B' pontot, amelyekre $AC' = CB' = \frac{AB}{3}$. A BB' és CC' szakaszok közös pontja legyen P . Bizonyítsuk be, hogy APB derékszög.

Megoldás. Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor által bezárt szög derékszög.

Legyen A' az AP szakasz meghosszabbításának BC -vel való metszéspontja. Ekkor a bizonyítandó állítás ekvivalens az $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$ állítással. Legyen egységnyi hosszú a háromszög egy-egy oldala. Ekkor $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = 1$, valamint tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$, és $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Ceva tételének megfordításából $\frac{BA'}{A'C} = 4$, azaz $\overrightarrow{BA'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Ebből $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Most tekintsük $\overrightarrow{AA'}$ és $\overrightarrow{BB'}$ skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BB'} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \right) = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{4}{5} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{15} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \\ &= \cos 120^\circ + \frac{1}{3} \cos 120^\circ + \frac{4}{5} + \frac{4}{15} \cos 120^\circ = 0. \end{aligned}$$

(Itt felhasználtuk a skaláris szorzás tulajdonságait, valamint azt, hogy a vektorok abszolút értéke 1.)

Az, hogy ennek a két vektornak szorzata 0, azt jelenti, hogy az általuk bezárt szög derékszög, ez pedig éppen az APB szög.

3. Legyenek a , b és c pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ csak akkor racionális, ha a , b és c négyzetszámok.

Megoldás. Ha volnának olyan a , b , c egészek, amelyekre $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ racionális, akkor olyanok is volnának, melyekre $d = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ egész szám. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. A $\sqrt{a} + \sqrt{b} = d - \sqrt{c}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd átrendezve

$$\sqrt{4ab} = d^2 + c - a - b - \sqrt{4d^2c},$$

innen újból négyzetre emelve

$$\sqrt{c} \cdot 4 \cdot d(d^2 + c - a - b) = (d^2 + c - a - b)^2 - 4 \cdot ab + 4 \cdot d^2c.$$

Ez pedig csak akkor lehet, ha c négyzetszám vagy ha $d(d^2 + c - a - b) = 0$. Ez utóbbi nem lehet, mert $d > 0$, és $d^2 + c - a - b = \sqrt{4ab} + \sqrt{4d^2c} > 0$. Tehát c négyzetszám. A fentiek elmondhatók a -ra és b -re is, amivel az állítást igazoltuk.

4. Az a, b és c olyan pozitív egész számok, amelyekre a és c , valamint b és c relatív prímek. Mutassuk meg, hogy az

$$x^a + y^b = z^c$$

egyenletnek végtelen sok egész megoldása van.

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha $x = u(u^a + v^b)^{br}$, $y = v(u^a + v^b)^{ar}$, $z = (u^a + v^b)^s$, és $abr + 1 = cs$, akkor minden u, v párra a fenti x, y, z kielégíti az $x^a + y^b = z^c$ egyenletet.

Csak az a kérdés, hogy van-e olyan v és s , amikre $abr + 1 = cs$. Igen, mindig van, mert $(a, c) = (b, c) = 1$, tehát $(a \cdot b, c) = 1$. Így ha r fut 1-től c -ig, $a \cdot b \cdot r$ teljes maradék rendszert ad c -re nézve, tehát lesz olyan r is, amire $a \cdot b \cdot r = c \cdot x + c - 1$, így $a \cdot b \cdot r + 1 = c(x + 1) = cs$.

5. Az ABC háromszög belsejének P olyan pontja, amelyre $PAB \sphericalangle = PBC \sphericalangle = PCA \sphericalangle = \omega$. Bizonyítsuk be, hogy $\omega \leq 30^\circ$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\omega > 30^\circ$, ebből ellentmondásra fogunk jutni. Legyen $PA = x$, $PB = y$ és $PC = z$. Mivel $\sin \omega > \frac{1}{2}$, azért

$$\begin{aligned} z &= a \frac{\sin \omega}{\sin \gamma} > \frac{a}{2 \sin \gamma}, \\ x &= b \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} > \frac{b}{2 \sin \alpha}, \\ y &= c \frac{\sin \omega}{\sin \beta} > \frac{c}{2 \sin \beta}. \end{aligned}$$

Ezek a BCP , CAP , ABP háromszögre felírt szinusz-tételből következnek. A háromszög t területére:

$$\begin{aligned} 2t &= xy \sin \beta + xz \sin \alpha + yz \sin \gamma \\ 8t &> \frac{bc}{\sin \alpha} + \frac{ab}{\sin \gamma} + \frac{ac}{\sin \beta}, \\ 8t &> \frac{2t}{\sin^2 \alpha} + \frac{2t}{\sin^2 \beta} + \frac{2t}{\sin^2 \gamma}, \\ 4 &> \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} = \frac{4R^2}{a^2} + \frac{4R^2}{b^2} + \frac{4R^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Itt R a körülírt kör sugara. Legyen $R = 1$, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből

$$1 > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b^2 c^2}}.$$

Mivel $abc = 4Rt = 4t$, továbbá az egységsugarú körbe írható maximális területű háromszög az egyenlő oldalú, s ennek területe $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, vagyis $t \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$, azért

$$1 > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b^2 c^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{16t^2}} \geq 1.$$

Ellentmondásra jutottunk, ebből következik, hogy valóban $\omega \leq 30^\circ$.

6. Képezzük a következő sorozatot: $x_1 = a$ (tetszőleges valós), $x_{n+1} = a(x_1 \pm \pm 1)$, a pozitív vagy negatív előjel minden lépésnél szabadon választható. Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat valamelyik eleme $+1$ vagy -1 , akkor $|a| < 2$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $|a| \geq 2$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor $|x_i| \geq 2$ ($i = 1, 2, \dots$). Ha $|x_i| \geq 2$, akkor $|x_i \pm 1| \geq 1$, bármelyik előjelet választjuk, és ekkor $|x_{i+1}| = |a(x_i \pm 1)| = |a| \cdot |x_i \pm 1|$, ami viszont nyilvánvalóan nagyobb vagy egyenlő, mint 2, hiszen $|a| \geq 2$. Ekkor azonban a sorozatnak nem lehet $+1$ vagy -1 tagja, tehát eredeti feltevésünk hamis, azaz $|a| < 2$.