

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk elmondani, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatmegoldásokkal kapcsolatos mindennemű kérdésükkel forduljanak a szerkesztőséghez. A kérdésekre levélben válaszol a rovatvezető.

Összefüggések a háromszög adatai között

A feladatokban a háromszög adataira a szokásos jelöléseket alkalmazzuk. A háromszög csúcsai A, B, C ; a csúcsoknál levő szögek rendre α, β, γ ; a magasságpont M ; a csúcsokból induló magasságvonalak hossza m_a, m_b és m_c . A háromszög kerülete $2s$, a körülírt kör sugara r , a beírt kör sugara ϱ , végül az A -ból induló belső szögfelező a BC oldalt G -ben metszi.

Bizonyítsuk be az alábbiakat:

$$1. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s}.$$

$$2. \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{2r}{\varrho}.$$

3. Hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög (a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög) kerülete $\frac{2\varrho s}{r}$.

$$4. \frac{AB}{CM} + \frac{BC}{AM} + \frac{CA}{BM} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{CM \cdot AM \cdot BM}$$

$$5. AG^2 = AB \cdot AC - GB \cdot GC$$

$$6. AM \cdot BM \cdot CM \leq \frac{8}{27} m_a \cdot m_b \cdot m_c$$

$$7. 2\varrho \leq r$$

$$8. 2s \leq 3\sqrt{3}r$$

$$9. m_a + m_b + m_c \geq 9\varrho$$

10. Hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög minimális kerületű a beírt háromszögek között.