

I. rész

1. a) $A = 101^{100^{99}}$, $B = 99^{100^{101}}$. Melyik szám a nagyobb, A vagy B ? (7 pont)

b) Írja föl az $f(x) = x^2$ függvény azon érintőjének az egyenletét, amelyik az x -tengely pozitív félegyenesével 60° -os szöget zár be. (6 pont)

Megoldás. a) A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növény, ezért elegendő a számok logaritmusát összehasonlítani. 1 pont

$$A_1 = \lg A = 100^{99} \cdot \lg 101,$$

$$B_1 = \lg B = 100^{101} \cdot \lg 99.$$

A_1 és B_1 pozitív számok, így összehasonlításukhoz ismét a logaritmusukat hasonlítjuk össze. 3 pont

(Ha a vizsgázó hatványozott hatványként pl. $A = 101^{100 \cdot 99}$ -cel dolgozik, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat a feladatra.)

$$\lg A_1 = 99 \cdot \lg 100 + \lg (\lg 101) = 198 + \lg (\lg 101) < 198 + \lg 10 = 199,$$

$$\lg B_1 = 101 \cdot \lg 100 + \lg (\lg 99) = 202 + \lg (\lg 99) > 202.$$

$$\lg A_1 < \lg B_1 \iff A_1 < B_1 \iff A < B. \quad 3 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

b) A keresett érintő meredeksége $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. 1 pont

A függvény deriváltja $f'(x) = 2x$. 1 pont

Az érintési pont első koordinátája a $2x = \sqrt{3}$ egyenletből $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a második koordináta $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}$. 3 pont

A keresett érintő egyenlete:

$$y = \sqrt{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{3}{4} = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}. \quad 1 \text{ pont}$$

Összesen: 6 pont

2. Hol a hiba az alábbi okoskodásokban? Mi az egyenlet megoldása az a) esetben és mennyi a szóban forgó valószínűség a b) kérdésben?

a) A $\sqrt{x} = -x$ egyenletnek nincs megoldása, mert egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív. (4 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy hét szabályos kockát feldobva van 1-es a számok között? Annak a valószínűsége, hogy egyetlen szabályos kockával 1-est dobunk, $\frac{1}{6}$. Eszerint annak a valószínűsége, hogy két szabályos kockát feldobva van 1-es a kijött számok között, kétszer ennyi, $\frac{1}{3}$; így tehát a kérdéses valószínűség 7-szer ennyi, $\frac{7}{6}$, az esemény bekövetkezése több, mint bizonyos. (5 pont)

c) Egy méter 100 centiméter, tehát $\frac{1}{4}$ méter = 25 centiméter. Az $\frac{1}{4}$ négyzetgyöke $\frac{1}{2}$, a 25 négyzetgyöke 5, tehát $\frac{1}{2}$ méter = 5 centiméter. (4 pont)

Megoldás. a) $-x$ nem negatív, ha $x \leq 0$. 2 pont

Az egyenlet megoldása a 0. 2 pont

(Ha a vizsgázó azt írja, hogy az indoklás azért hibás, mert az egyenletnek van megoldása, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.)

Összesen: 4 pont

b) A siker valószínűsége nem egyenesen arányos a kísérletek számával. 2 pont

Annak valószínűsége, hogy nincs 1-es a számok között: $\left(\frac{5}{6}\right)^7$, ezért a szóban forgó valószínűség értéke $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,7209$. 3 pont

(Akkor is jár a 3 pont, ha a vizsgázó nem hivatkozik a binomiális eloszlásra. Ha 1-et közöl eredményként, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.)

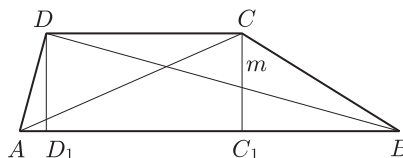
Összesen: 5 pont

c) Egy mennyiség mértéke a mérőszámnak és az egységnek a szorzata. A mérőszámokból vont négyzetgyökvonás akkor vezet igaz egyenlőséghez, ha mindkét oldalon ugyanaz az egység. 4 pont

Összesen: 4 pont

3. Egy trapéz magassága, egyik, illetve másik átlója ebben a sorrendben egy $q = 2$ hányadosú mértani sorozat három szomszédos tagja. A trapéz területe $T = \sqrt{60} + \sqrt{12}$ területegység. Mekkora a trapéz magassága? (12 pont)

Megoldás. Legyenek a trapéz csúcsai $ABCD$, a magassága m . A feltétel szerint $AC = 2m$, $BD = 4m$. Legyen a C és a D vetülete az AB oldalon C_1 és D_1 . 2 pont



Pythagorasz tétele szerint $AC_1 = \sqrt{3}m$ és $BD_1 = \sqrt{15}m$. 2 pont
Mivel $C_1D_1 = CD$, azért a trapéz alapjainak összege:

$$AB + CD = AC_1 + BD_1 = \sqrt{3}m + \sqrt{15}m = \sqrt{3}m(1 + \sqrt{5}). \quad 5 \text{ pont}$$

A trapéz kétszeres területe:

$$\sqrt{3}m(1 + \sqrt{5}) \cdot m = 2(\sqrt{60} + \sqrt{12}).$$

Innen $m^2 = 4$, azaz $m = 2$. 3 pont

Összesen: 12 pont

4. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $2x^4 \leq x^2 + 1$. (5 pont)

b) $2 \cos^2 x \geq \cos x + 1$. (8 pont)

Megoldás. a) A $t = x^2 \geq 0$ új változó bevezetésével az egyenlőtlenség $2t^2 - t - 1 \leq 0$ alakba írható. 2 pont

Ennek a megoldása: $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. 2 pont

(A grafikus megoldásért is jár a 2 pont.)

Mivel $t \geq 0$, a megoldás $0 \leq x^2 \leq 1$, azaz $-1 \leq x \leq 1$. 1 pont

Összesen: 5 pont

b) Most a $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$) helyettesítés után a $2t^2 - t - 1 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. 2 pont

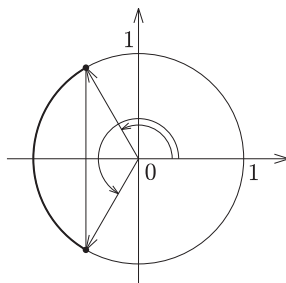
(1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó később jelöli ki az új változó értékészletét.)

Ennek a megoldása: $t \leq -\frac{1}{2}$ vagy $1 \leq t$. 1 pont

Ha $\cos x = t \leq -\frac{1}{2}$, akkor $\cos x \leq -\frac{1}{2}$, azaz

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \text{ egész.} \quad 3 \text{ pont}$$

(Ha a vizsgázó fokokban adja meg a megoldást, akkor 2 pontot, ha keverve, vagy nem írja a periódust, akkor 1 pontot kaphat.)



Ha $1 \leq t = \cos x$, akkor $\cos x = 1$, tehát $x = 2n\pi$, ahol n egész.

2 pont

Összesen: 8 pont

II. rész

5. a) *A pozitív egész A és B számok összege 1000. Igazolja, hogy A^2 utolsó három számjegye egyenlő B^2 utolsó három számjegyével.* (4 pont)

b) *Adjon meg olyan pozitív egész A és B számokat, amelyek összege 1000 és A^2 utolsó négy számjegye egyenlő B^2 utolsó négy számjegyével.* (3 pont)

c) *Hány pozitív osztója van a $H = 2^{24} - 1$ számnak?* (9 pont)

Megoldás. a) Az állítás akkor teljesül, ha $1000 \mid A^2 - B^2$. 2 pont

$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = 1000(A - B)$, tehát az állítás igaz. 2 pont

(Másik megoldás.) $B = 1000 - A$, tehát

$$B^2 = (1000 - A)^2 = (1000^2 - 2000A) + A^2. \quad 2 \text{ pont}$$

$1000 \mid 1000^2 - 2000A$, így B^2 és A^2 utolsó három jegye megegyezik. 2 pont

Összesen: 4 pont

b) Az utolsó 4 számjegy akkor egyezik meg, ha $10\,000 \mid A^2 - B^2$. 1 pont

Így $(A - B)$ -nek oszthatónak kell lennie 10-zel. Az $A + B = 1000$ feltétel esetén ez például teljesül, ha A is és B is osztható 10-zel. Egy példa: $A = 110$, $B = 890$. 2 pont

Összesen: 3 pont

c) Bontsuk a H számot prímtényezők szorzatára, ehhez pedig alakítsunk szorzattá:

$$\begin{aligned} H &= (2^{12} - 1)(2^{12} + 1) = (2^6 - 1)(2^6 + 1)((2^4)^3 + 1) = \\ &= (2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^2 + 1)(2^4 - 2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1). \end{aligned} \quad 4 \text{ pont}$$

(A 4 pont akkor is jár, ha a vizsgázó akkora tényezőig jut a felbontásban, amelyek már kézzel „kezelhetők”, illetve ha tovább bont.)

Behelyettesítve: $H = 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$. Innen a törzstényezős felbontás:

$$H = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241. \quad 2 \text{ pont}$$

Innen a H pozitív osztóinak a száma:

$$d(H) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 96. \quad 3 \text{ pont}$$

Összesen: 9 pont

6. *Egy dobozban pénzérmeék és golyók vannak, amelyek ezüstből vagy aranyból készültek. A dobozban lévő tárgyak 20%-a golyó, a pénzérmeék 40%-a ezüst, az aranytárgyak 80%-a érme.*

a) *A dobozban lévő tárgyak hány százaléka arany pénzérme?* (4 pont)

b) *A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy tárgyat. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a tárgy ezüstből készült?* (4 pont)

c) *A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a golyó ezüstből készült?* (4 pont)

d) *Értelmezze a b) és a c) feladatok eredményét a következő eseményekre: E : a kihúzott tárgy ezüstből van; G : a kihúzott tárgy golyó.* (4 pont)

Megoldás. Jelölje t a tárgyak számát és foglaljuk táblázatba az adatokat: a táblázat kitöltésekor használjuk föl, hogy a sor-, illetve oszlopösszegek összege a tárgyak száma. 6 pont

	Golyó	Érme	Össz.
Arany	$0,12t$	$0,48t$	$0,6t$
Ezüst	$0,08t$	$0,4 \cdot 0,8t = 0,32t$	$0,4t$
Össz.	$0,2t$	$0,8t$	t

(Ha a táblázat helyes, akkor az a), b), c) kérdések helyes megoldására még 2–2 pont adható. Az egyes részfeladatok megoldásakor halmazábra is használható, akkor 2–2 pont jár egy-egy részfeladat helyes ábrázolásáért.)

- a) 48%. 2 pont
 b) 0,4. 2 pont
 c) 0,4. 2 pont
 d) Az eredmények szerint az ezüst tárgyak aránya a golyók között azonos az ezüst tárgyak arányával a dobozban: az E és a G események függetlenek. 4 pont
 (Másféle indoklás is elfogadható a két esemény függetlenségére; pl. $P(EG) = P(E) \cdot P(G)$, vagy $P(E | G) = P(E)$.)

Összesen: 16 pont

7. Egy számtani sorozat első tagja 9, a kilencedik tagja pedig 33.

a) Határozza meg a fenti számtani sorozat azon tagjainak az összegét, amelyek 149 és 301 között vannak. (10 pont)

b) Mennyi a sorozat első huszonöt elemének a négyzetösszege? (6 pont)

Megoldás. a) $d = \frac{a_9 - a_1}{9 - 1} = 3$. 2 pont

$a_n = a_1 + (n - 1)d = 3n + 6$. 1 pont

A sorozat n -edik tagja akkor esik 149 és 301 közé, ha

$$149 < 3n + 6 < 301, \quad \text{azaz} \quad \frac{143}{3} < n < \frac{295}{3},$$

ami akkor és csak akkor teljesül, ha $47 < n < 99$. 3 pont

A sorozatnak összesen $98 - 47 = 51$ tagja esik a megadott határok közé. A legkisebb $a_{48} = 150$, a legnagyobb $a_{98} = 300$. 2 pont

$$a_{48} + \dots + a_{98} = 51 \cdot \frac{a_{48} + a_{98}}{2} = 11\,475. \quad \text{2 pont}$$

Összesen: 10 pont

b) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{25}^2 = \sum_{i=1}^{25} (3i + 6)^2 = 9 \sum_{i=1}^{25} (i + 2)^2$. 2 pont

$\sum_{i=1}^{25} (i + 2)^2$ az első 27 pozitív egész négyzetösszegénél 5-tel kisebb. 2 pont

Az ismert összefüggés szerint:

$$\sum_{n=1}^{27} n^2 = \frac{27 \cdot 28 \cdot 55}{6} = 6930,$$

tehát a keresett összeg $9 \cdot 6925 = 62\,325$. 2 pont

Összesen: 6 pont

(Akkor is jár a 6 pont, ha a vizsgázó az összegzés előtt végzi el a négyzetre emelést. Ekkor a számolás:

$$\sum_{i=1}^{25} (3i + 6)^2 = \sum_{i=1}^{25} 9i^2 + \sum_{i=1}^{25} 36i + \sum_{i=1}^{25} 36 = 49\,725 + 11\,700 + 900 = 62\,325.)$$

8. Egy klinikán olyan betegség kimutatására végeznek vérvizsgálatot, amelyikben száz ember közül átlagosan egy szenved. A vizsgálati személyek ötvenes csoportokban érkeznek és az eddigi gyakorlat szerint egyesével végzik el rajtuk a tesztet. Egyetlen vérminta vizsgálata 300 forintba kerül.

A klinika vezetője két módosító javaslatot kapott:

A) Egy-egy 50-es csoport vérmintáinak egy részét azonosítható módon tegyék félre, a másik részeket pedig öntsék össze és vizsgálják először a csoportos mintát. Ha ez negatív, akkor nyilván mindenki egészséges, ha pozitív, akkor a félretett egyéni mintákat vizsgálják egyesével.

B) Az A) javaslatához hasonlóan először az 50-es csoport együttes vérmintáját vizsgálják meg. Ha ez pozitív, akkor minden egyes féltretezt egyéni minta felől két 25-fős, csoportos mintát készítenek és ezeket ismét együttesen vizsgálják. Ha bármelyik csoport pozitívnak bizonyul, akkor annak a csoportnak a tagjait egyesével szűrik.

A klinika vezetőjeként változtatna-e az addigi gyakorlaton? Ha igen, akkor hogyan és miért? (16 pont)

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy egy ember beteg, 0,01 és az egyes emberek egymástól függetlenül betegek vagy sem. 1 pont

(Ez az 1 pont nem jár, ha a vizsgáló nem említi a függetlenséget.)

Az eredeti eljárás szerint egy 50-es minta vizsgálati költsége $50 \cdot 300 = 15\,000$ Ft. 1 pont

Az A és a B változatok esetén a költségek várható értékét határozzuk meg és hasonlítjuk össze. 2 pont

A) Annak a valószínűsége, hogy egy 50-es mintában nincs beteg, $p = 0,99^{50} \approx 0,605$, annak, hogy van, $1-p \approx 0,395$. 2 pont

Az A) változat költségének várható értéke tehát: $E_A = p \cdot 300 + (1-p) \cdot 51 \cdot 300 \approx 6225$ Ft. 3 pont

B) Annak a valószínűsége, hogy egy 25 fős mintában nincs beteg: $p_1 = 0,99^{25} \approx 0,778$. 1 pont

A két 25 fős minta esetén a lehetőségek a megfelelő valószínűségekkel:

– mindkét csoport egészséges: $p_1^2 = p \approx 0,605$.

– egy csoport egészséges: $2p_1 \cdot (1-p_1) \approx 0,345$.

– mindkét csoport beteg: $(1-p_1)^2 \approx 0,05$. 3 pont

(Ha a kerekítés miatt nem 1 az összeg, akkor 2 pont, ha elvi hiba van, akkor maximum 1 pont.)

A szükséges tesztek száma az egyes esetekben: 2; 27; 52. A vizsgálat költségének várható értéke:

$$E_B = 300[2 \cdot 0,605 + 27 \cdot 0,345 + 52 \cdot 0,05] \approx 3937,5 \text{ Ft.} \quad 2 \text{ pont}$$

A B) változatot érdemes választani. 1 pont

Összesen: 16 pont

9. Az alábbi feladatok megoldása során kalkulátor nem használható. Eredményeit indokolja.

a) 1. Írja föl az $(1+x)^{10}$ hatvány kifejtésének első négy tagjának összegét az x növekvő hatványai szerint rendezve. (2 pont)

2. A talált kifejezés alapján adjon közelítést $1,005^{10}$ értékére. (1 pont)

3. Igazolja, hogy az így kapott közelítés négy tizedesjegyre pontos. (5 pont)

b) 1. Ábrázolja az $f(x) = \frac{1500x+1}{500x-2}$ függvény grafikonját, ha $x > 1\,000$. (2 pont)

2. Határozza meg az

$$\frac{1500x+1}{500x-2} = \frac{3x}{10\,000}$$

egyenlet pozitív megoldásának az egész részét. (6 pont)

Megoldás. a)

$$(1+x)^{10} \rightarrow 1 + 10x + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{3}x^3 = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3. \quad 2 \text{ pont}$$

Ennek alapján

$$1,005^{10} = (1 + 0,005)^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0,005 + 45 \cdot 0,000\,025 + 120 \cdot 0,000\,000\,125 = 1,05114. \quad 1 \text{ pont}$$

A további 7 tagot felülről becsülhetjük, felhasználva, hogy a szereplő binomiális együtthatók maximuma $\binom{10}{5} = 252$ és $x = 0,005$ hatványai fogynak. Így mindegyikük legfeljebb $252x^4$, az összegük kisebb, mint

$$7 \cdot 252 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^4 < 10^{-8} \cdot 1764 < \frac{10^{-4}}{2}.$$

Az első négy tag összege tehát négy tizedesre pontos. 5 pont
(Más helyes becslés is elfogadható.)

Összesen: 8 pont

b) A függvény grafikonja megkülönböztethetetlen a vízszintes aszimptotától, melynek egyenlete $y = 3$.

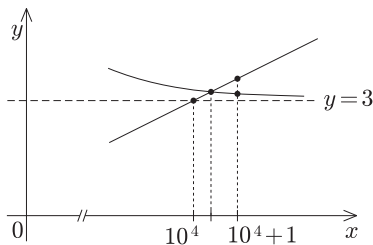
Emellett ha $x > \frac{1}{250}$, akkor $f(x) > 3$.

3 pont

(Akkor is jár ez a 3 pont, ha a vizsgázó csak a következő részben említi, hogy a függvény itt az aszimptota fölött halad.)

Ha az adott egyenlet helyett a $3 = \frac{3x}{10\,000}$ egyenletet oldjuk meg, akkor mivel $\frac{1500x+1}{500x-2} > 3$, másfelől a jobb oldali függvény növekvő, a módosított egyenlet megoldása, 10 000, a valódi megoldásnál kisebb.

3 pont



Másfelől egyszerű számolással kapjuk, hogy ha x helyébe 10 001-et írunk, akkor az eredeti egyenlet jobb oldala nagyobb lesz, mint a bal, a pozitív gyök tehát kisebb, mint 10 001, így az egész része 10 000.

2 pont

(Ha a vizsgázó az aszimptota megállapítása után közli, hogy a gyök egész része 10 000, kaphat 1 pontot. Grafikusán csak annyi fogadható el, hogy a gyök nagyobb, mint 10 000.)

Összesen: 8 pont