

A múlt havi számunkban közreadtuk a 2004. évi KöMaL Ankét totó-kérdéseit. A helyes válasz:

1, 2, 2, 2, 2, X, 1, 1, 2, X, 1, 2, X.

Telitalálatos szelvényt adott be és könyvjutalmat kapott *Paulin Roland* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.), *Pálinskás Csaba* (Szolnok, Verseyhy F. Gimn., 12. évf.) és *Horváth Márton* (ELTE TTK matematikus hallgató).

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a totóban szereplő feladatok megoldásához.

1. Egy sorozat első tagja 439. Minden további tag az előző tag számjegyei összegének a 13-szorosa. Mennyi a sorozat 99-edik eleme? 130 (1); 169 (2); 143 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). A sorozat első néhány tagját felírva:

$$\underbrace{439}_{16} \rightarrow \underbrace{208}_{10} \rightarrow \underbrace{130}_4 \rightarrow \underbrace{52}_7 \rightarrow \underbrace{91}_{10} \rightarrow \mathbf{130}.$$

A sorozat periodikus, a 3-mal osztható sorszámú elemek értéke 130.

2. Két egyforma, négyzet alapú téglatest alakú edénybe egyforma tömegű vizet, illetve étolajat öntünk. Melyik esetben nagyobb az oldallapokra ható erő? A víznél (1); az étolajnál (2); egyforma (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Az edény fenéklapjánál a nyomás mindkét esetben ugyanakkora (nevezetesen a folyadék súlyának és a négyzet területének hányadosa). Az egyes oldallapokra ható átlagos nyomás (a fenéknymomás fele) ugyancsak független a folyadék sűrűségétől. Eszerint valamelyik kiszemelt oldallapra ható erő az oldallap folyadékkal érintkező részének területével arányos; ez pedig (a víznél kisebb sűrűségű) étolaj esetében nagyobb.

3. Tekintsük azokat az egész együtthatós $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomokat, amelyeknek van két különböző valós gyökük a $(0; 1)$ nyílt intervallumban. Ekkor $|a|$ minimális értéke 4 (1); 5 (2); 6 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Legyenek egy ilyen tulajdonságú polinom gyökei x_1 és x_2 . Ekkor

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$P = f(0) \cdot f(1) = a^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)$. Mivel $t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$, ha $0 < t < 1$ és pontosan akkor van egyenlőség ha $t = \frac{1}{2}$, továbbá a feltétel szerint $x_1 \neq x_2$, azért $0 < P < \frac{a^2}{16}$ ($a > 0$).

Mivel P egész, azért az alsó korlát legalább 1, így $16 < a^2$, tehát a legalább 5.

Az $f(x) = 5x^2 - 5x + 1$ példa mutatja, hogy a talált korlát éles.

4. Egy foton energiája megegyezik egy elektron mozgási energiájával. Melyik részecskének nagyobb a lendülete? A fotonnak (1); az elektronnak (2); csak további adatok ismeretében lehet eldönteni (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). A foton E energiája és p_f impulzusa (lendülete) között $E = p_f c$ a kapcsolat (c a fénysebesség).

Ha az elektron nemrelativisztikusan ($v \ll c$ sebességgel) mozog, akkor a mozgási energiája $E = \frac{mv^2}{2}$, és az impulzusa

$$p_e = mv = \frac{2}{v} E = \frac{2c}{v} p_f > p_f.$$

Az elektron lendülete akkor is nagyobb a megfelelő fotonénál, ha a részecske mozgása a relativisztikus tartományba esik. Ilyenkor a teljes (nyugalmi + mozgási) energia és a lendület között

$$(E + mc^2)^2 = (p_e c)^2 + (mc^2)^2$$

a kapcsolat, ahonnan

$$p_e^2 = p_f^2 + 2mc \cdot p_f,$$

és mivel a jobb oldal második tagja pozitív, $p_e > p_f$.

5. Hányféleképpen lehet egy konvex tízszöget 8 háromszögre felbontani? 800 (1); 1430 (2); 1440 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Nem nehéz megmutatni, hogy ha egy konvex n -szöget $n - 2$ háromszögre bontunk fel, akkor a felbontás egymást nem metsző átlók segítségével történik, a háromszögek csúcsai a sokszög csúcsai is egyben. Jelölje az ilyen felbontások számát A_n . Nyilván $A_3 = 1$ és $A_4 = 2$. Vezessük be még az $A_2 = 1$ konvenciót is. Az n -szög egyik oldalát kiszemelve, ez valamelyik háromszögnek is oldala lesz. Aszerint, hogy ennek a háromszögnek a harmadik csúcsa éppen melyik csúcsa lesz a konvex n -szögnek, felírhatjuk az alábbi rekurziót:

$$A_n = \sum_{i=2}^{n-1} A_i A_{n+1-i}.$$

Ennek alapján

$$A_5 = 2 + 1 + 2 = 5,$$

$$A_6 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14,$$

$$A_7 = 14 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 14 = 42,$$

$$A_8 = 42 + 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 + 42 = 132,$$

$$A_9 = 132 + 42 + 2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 2 + 42 + 132 = 429,$$

$$A_{10} = 429 + 132 + 2 \cdot 42 + 5 \cdot 14 + 14 \cdot 5 + 42 \cdot 2 + 132 + 429 = 1430.$$

6. *Hány százalékkal változna meg az első kozmikus sebesség, ha a Föld sugara és az átlagsűrűsége is valamilyen ok miatt 1%-kal megnőne? 2%-kal nőne (1); 1,5%-kal nőne (2); 1%-kal csökkenne (X).*

Megoldás. A helyes válasz: (2). Egy M tömegű és R sugarú égitestnél az első kozmikus sebesség (az égitest közelében körpályán keringő üreszköz sebessége) $v \sim \sqrt{M/R}$, de mivel $M \sim \rho R^3$ (ahol ρ az égitest átlagsűrűsége), $v \sim R\rho^{\frac{1}{2}}$.

Ha a Föld sugara és az átlagsűrűsége is valamilyen ok miatt 1%-kal megnőne, az első kozmikus sebesség $1,01^{1,5} = 1,015\,037$ -szeresére változna, tehát mintegy 1,5%-kal nőne.

7. *Az ABC háromszög magasságpontja H , körülírt körének középpontja O , a BC oldal felezőpontja F , az A -ból induló magasság talppontja T . A H , O , F , T pontok egy téglalap csúcsai, melynek oldalai: $HO = 11$, $OF = 5$. Mekkora a BC oldal hossza? 32 (1); $16 + 5\sqrt{3}$ (2); 28 (X).*

Megoldás. A helyes válasz: (X). Ismeretes, hogy az O kezdőpontú helyvektorrendszerben $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ és így $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{h} - \mathbf{a}}{2}$. Így tehát $AH = 2OF = 10$. Pitagorasz tételét alkalmazva $OC = OA = \sqrt{AH^2 + OH^2}$, ahonnan

$$BC = 2CF = 2\sqrt{OC^2 - OF^2} = 2\sqrt{221 - 25} = 28.$$

8. *Szélcsendes időben egy nagy magasságból leejtett könnyű golyó állandósult sebessége 20 m/s lesz. Az elejtésétől számítva mennyi idő múlva éri el a sebessége a 19 m/s-os értéket, ha a közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos? 3,73 s (1); 3,14 s (2); 37,3 s (X).*

Megoldás. A helyes válasz: (1). A test mozgásegyenlete

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right),$$

ahol v_0 az állandósult sebesség. A végsebesség bizonyos hányadának (jelen esetben $\frac{19}{20}$ részének) eléréséhez szükséges időt numerikusan (a sebességváltozásokat véges sok kis lépésben számolva) becsülhetjük, vagy (az $u = \frac{v}{v_0}$ új változót bevezetve) integrálszámítás segítségével számíthatjuk ki:

$$t = \frac{v_0}{g} \int_0^{\frac{19}{20}} \frac{du}{1 - u^2} = \frac{v_0}{g} \frac{\ln 39}{2} \approx 3,73 \text{ s.}$$

9. *Mennyi $\frac{10^{20\,000}}{10^{100} + 3}$ egész részének utolsó számjegye? 3 (1); 5 (2); 7 (X).*

Megoldás. A helyes válasz: (1).

$$A = \frac{10^{20\,000} - 3^{200}}{10^{300} + 3} \text{ egész szám és } A = \left[\frac{10^{20\,000}}{10^{100} + 3} \right], \text{ mert } \frac{3^{200}}{10^{100} + 3} = \frac{9^{100}}{10^{100} + 3} < 1.$$

Mivel $A = (10^{100})^{199} - 3 \cdot (10^{100})^{198} + \dots + 3^{198} \cdot 10^{100} - 3^{199}$, továbbá $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, azért $A \equiv -3^{199} \equiv -3^3 \cdot (81)^{49} \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}$.

10. *Két, egyenként $+Q$ töltésű rögzített fémgömb F_1 erővel taszítja egymást. Ha az egyik gömb töltését $-Q$ -ra változtatjuk, akkor F_2 erővel vonzzák egymást. Melyik állítás igaz? $F_1 > F_2$ (1); $F_1 < F_2$ (2); $F_1 = F_2$ (X).*

Megoldás. A helyes válasz: (2). Ha a gömbök mérete sokkal kisebb, mint a középpontjaik közötti x távolság, akkor (első közelítésben) a taszító- és a vonzóerő nagysága megegyezik; mindkettő $k \frac{Q^2}{x^2}$. Viszonylag közeli gömbök (vagy pontosabb számolás igénye) esetén figyelembe kell vennünk a megosztás jelenségét. Egyforma töltésű gömböknél a rajtuk levő töltések „átlagos távolsága” x -nél nagyobb, különböző töltések esetén pedig x -nél kisebb; emiatt $F_1 < F_2$.

11. Egy 3 egység oldalú szabályos hatszöget olyan egységoldalú rombuszokkal szeretnénk kiparkettázni, melyek kisebbik szöge 60 fokok. Hányféleképpen lehet ezt megtenni? 324 (1); 720 (2); 980 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). A megoldás, amely feltételezi a determinánsok ismeretét (és némi angol nyelvtudást), megtekinthető a

<http://www.cs.elte.hu/~karolyi/GT/index.html>

lapon, lásd *determinant lemma (Lecture VII) and its application to rhombic tilings (Lecture VIII)*. Itt sok más érdekesség is található, például az 5. feladat általános megoldása az úgynevezett Catalan-számok segítségével.

12. Kelthet-e egy nagyon gyorsan mozgó, elektromosan töltött részecske a szuperszonikus repülőgépek Mach-kúpja mentén terjedő hanghullámokhoz hasonló, ugyancsak kúpszerűen terjedő elektromágneses sugárzást? Igen, de csak akkor, ha a részecske a fénynél gyorsabban mozog (1); nem, mert egyetlen részecske sem mozoghat gyorsabban, mint a fény (2); a kérdést elméletileg tisztázták, kísérletileg azonban még eldöntetlen (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). Egy elektromosan töltött részecske polarizálható közegben (pl. vízben) kúpszerűen terjedő elektromágneses sugárzást (ún. Cserenkov-sugárzást) bocsát ki, ha a részecske sebessége meghaladja a közegbeli fénysebességet. Az így működő részecskeazonosító berendezéseket Cserenkov-detektoroknak nevezik, és elterjedten alkalmazzák a nagyenergiájú kísérleti részecskefizikában.

13. A 400 jegyű számok közül taláalomra kiválasztunk egyet. Annak a valószínűsége, hogy egy prímszámot választottunk ki, körülbelül $\frac{1}{100}$ (1); $\frac{1}{1000}$ (2); $\frac{1}{10\,000}$ (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Ha x pozitív egész, akkor jelölje $\pi(x)$ az x -nél nem nagyobb pozitív prímek számát. Ismeretes, hogy $\pi(x)$ értéke közelítőleg $x/\ln x$. A 400 jegyű számok száma $9 \cdot 10^{399}$, ezek között a prímek száma $\pi(10^{400}) - \pi(10^{399})$. A kérdéses valószínűség értéke ezek szerint közelítőleg

$$\frac{1}{9 \cdot 10^{399}} \left(\frac{10^{400}}{400 \ln 10} - \frac{10^{399}}{399 \ln 10} \right) \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{399}} \left(\frac{10^{400}}{400 \ln 10} - \frac{10^{399}}{400 \ln 10} \right) = \frac{1}{400 \ln 10} \approx \frac{1}{1000}.$$

13+1. Földi űrhajósok nagyon hosszú utazás végén egy olyan bolygó közelébe érnek, amelynek elektromos potenciálja igen nagy a Földéhez képest. Veszélyes-e emiatt a bolygó felszínére lépniük? Igen, áramütésnek teszik ki magukat, ha kilépnek az űrhajóból (1); már a bolygó megközelítése is veszélyekkel jár, ha az űrhajó fala nem jó elektromos vezető, és emiatt nem tekinthető Faraday-kalickának (2); nyugodtan leszállhatnak és kiléphetnek a bolygó felszínére, a Föld és az idegen bolygó közötti nagy potenciálkülönbség önmagában nem jelent veszélyt számukra (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). A Föld és az idegen bolygó közötti nagy potenciálkülönbség önmagában nem jelent veszélyt, hiszen az űrhajósok mindig csak a helyi (lokális) potenciálváltozást (télerősséget) érzékelik, nem pedig a teljes utazás során „összegyűjtött” potenciálváltozást. (A földi potenciált nem „viszik magukkal”). A helyzet hasonló a tengerszintről induló hegymászók esetéhez. Ha lassan kapaszkodnak fel egy nagyon magas (nagy helyzeti energiával rendelkező) hegycsúcsra, a magasságkülönbséget és az annak megfelelő energiakülönbséget a csúcsra lépve közvetlenül nem érzékelik, legfeljebb annak közvetett hatását (pl. a fokozatosan csökkenő légnyomást) tapasztalják.