

I. rész

1. Az A és B helységek közötti távolság $\frac{1}{4}$ részét egy kerékpáros 1 óra alatt tette meg, a hátralevő utat pedig 4 óra alatt. Sebességének mérőszáma (km/órában) mindkét szakaszon egész szám, melyek legkisebb közös többszöröse 72. Mekkora az AB távolság? (11 pont)

Megoldás. Ha a kerékpáros az A és B helységek közötti távolság $\frac{1}{4}$ részét 1 óra alatt tette meg, a hátralevő utat pedig 4 óra alatt, akkor az út első, ill. második szakaszán levő v_1 és v_2 sebességeinek aránya: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}$.

Ez azt jelenti, hogy valamely k pozitív egész számra:

$$v_1 = 4k, \quad v_2 = 3k \quad \text{és} \quad [4k; 3k] = 72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Ezek szerint k prímtényezősz felbontásában szerepelnie kell egy db 2-esnek, egy db 3-asnak, és további prímeket már nem tartalmazhat. Tehát csak $k = 2 \cdot 3 = 6$ lehetséges.

Így $v_1 = 4 \cdot 6 = 24$, $v_2 = 3 \cdot 6 = 18$. A keresett távolság: $1 \cdot 24 + 4 \cdot 18 = 96$ km.

2. a) Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x} = xy \\ xy + 4 = 2(x + y). \end{cases} \quad (7 \text{ pont})$$

b) Egy számtani sorozat első tagja az egyenletrendszer x , y megoldása közül a nagyobbik, differenciája pedig a kisebbik. Hány kétjegyű pozitív egész tagja van a sorozatnak? (6 pont)

Megoldás. a) Az első egyenletből

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1 = xy, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Ezzel a második egyenlet:

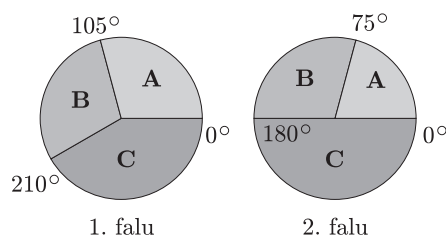
$$5 = 2 \left(x + \frac{1}{x} \right), \quad \text{azaz} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 2$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$.

b) Bármelyik megoldás esetében a kérdéses számtani sorozat első tagja 2, differenciája $\frac{1}{2}$.

Ha $10 \leq 2 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} \leq 99$, akkor $17 \leq n \leq 195$. Ez összesen $195 - 16 = 179$ tag. De ezek közül csak azok lesznek pozitív egészek, amelyekre n értéke páratlan, $n = 2k + 1$, azaz $n = 17, 19, 21, 23, \dots, 195$. Ezek száma: $17 + (k - 1) \cdot 2 = 195$ alapján $k = 90$. Tehát a kérdéses számtani sorozatnak 90 db kétjegyű pozitív egész tagja van.

3. Három falu közös polgármestert választ. Három jelölt (**A**, **B** és **C**) közül lehet választani. Az 1. faluban 2016, a 2.-ban 1320 választásra jogosult járult az urnákhoz. A kördiagramok az 1. és a 2. faluban született eredményeket szemléltetik. Sajnos a 3. faluban született eredményt szemléltető kördiagram elveszett.



A választás összesített végeredménye:

A jelölt: 1599 szavazat, **B** jelölt: 2169 szavazat, **C** jelölt: 1776 szavazat.

a) Készítsük el a 3. falu választási eredményét szemléltető kördiagramot. (10 pont)

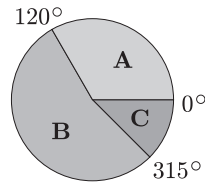
b) Hány lakosa van a 3. falunak, ha a falu lakosainak 72%-a volt választásra jogosult és a választásra jogosultak 56%-a vett részt a szavazáson? (4 pont)

Megoldás. a) A megadott kördiagramok alapján az 1. és a 2. faluban a szavazatok száma:

1. falu **A:** 588, **B:** 588, **C:** 840,

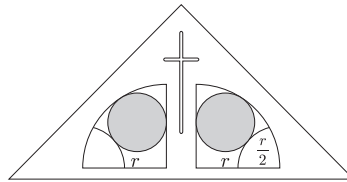
2. falu **A:** 275, **B:** 385, **C:** 660.

Az egyes jelöltek szavazatainak összegét levonva a végeredményből, megkapjuk a 3. falu választási eredményét: **A:** 736, **B:** 1196, **C:** 276 szavazat. Az ennek megfelelő kördiagram:



b) $x \cdot 0,72 \cdot 0,56 = 2208$, ahonnan $x \approx 5476,2$. Kerekítés után kapjuk, hogy a 3. falunak 5476 lakosa van.

4. Az ábrán egy falucska építendő kápolnájának díszítőeleme látható. Mekkora a besatírozott körök (üvegablakok) sugara, ha a külső negyedkörök sugara: $r = 80$ cm? (14 pont)



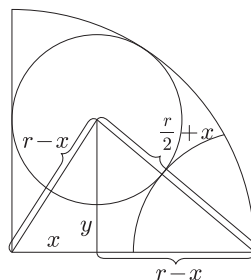
Megoldás. Ha x a keresett kör sugara, akkor az ábra megfelelő derékszögű háromszögeire felírva Pitagorasz tételét az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = (r - x)^2 + y^2 \quad \text{és} \quad (r - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Azaz

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = (r - x)^2 + (r - x)^2 - x^2.$$

Innen $x = \frac{7}{20}r$, tehát az üvegablakok sugara: $\frac{7 \cdot 80}{20} = 28$ cm.



II. rész

5. Legyen az A halmaz az (1), a B halmaz pedig a (2) kifejezés értelmezési tartománya:

$$(1) \sqrt{2 \sin^2 \pi x - \cos \pi x - 1}, \quad (2) \lg(-3x^2 + 17x - 10).$$

Határozzuk meg

a) az $A \cap B$ halmaz elemeit; (11 pont)

b) a $B - A$ halmaz elemeit. (5 pont)

Megoldás. a) Az A halmaz elemeit a $2 \sin^2 \pi x - \cos \pi x - 1 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásai adják.

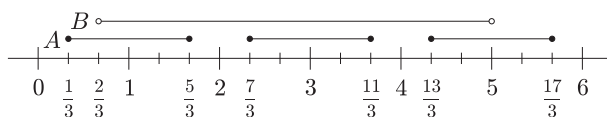
$$2(1 - \cos^2 \pi x) - \cos \pi x - 1 \geq 0, \quad \text{ahonnan} \quad -2 \cos^2 \pi x - \cos \pi x + 1 \geq 0.$$

E másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $-1 \leq \cos \pi x \leq \frac{1}{2}$, azaz $\cos \pi x \leq \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{1}{3} + 2k \leq x \leq \frac{5}{3} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A B halmaz elemeit a $-3x^2 + 17x - 10 > 0$ egyenlőtlenség megoldása adja. A másodfokú kifejezés zérushelyei: $\frac{2}{3}$ és 5 , tehát a B halmaz elemei: $\frac{2}{3} < x < 5$.

Ábrázoljuk a két halmaz elemeit egy számegyenesen:



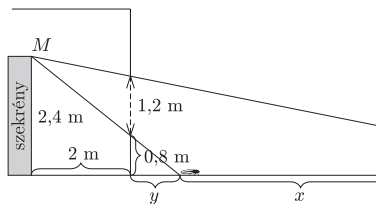
Az $A \cap B$ halmaz elemei:

$$\left\{ x: \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{3} \right\} \cup \left\{ x: \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3} \right\} \cup \left\{ x: \frac{13}{3} \leq x < 5 \right\}.$$

b) A $B \setminus A$ halmaz elemei:

$$\left\{ x: \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3} \right\} \cup \left\{ x: \frac{11}{3} < x < \frac{13}{3} \right\}.$$

6. A faltól 2 méterre levő, 2,4 méter magas szekrény sarkának M pontjában ül egy madár és az 1,2 m magasságú ablakon át figyel, amint egy bogár mászik az udvaron a ház falára merőleges irányban 0,8 méter/perc sebességgel. Az ablak alsó széle a földtől 0,8 méter magasan van. Mennyi ideig látja a madár a bogarat? (16 pont)



Megoldás. Az ábra megfelelő hasonló háromszögeiből $\frac{y}{0,8} = \frac{y+2}{2,4}$, ahonnan $y = 1$ és $\frac{x+y}{0,8+1,2} = \frac{x+y+2}{2,4}$, azaz $\frac{x+1}{2} = \frac{x+3}{2,4}$, ahonnan $x = 9$ m.

Tehát a madár a bogarat

$$t = \frac{9 \text{ m}}{0,8 \frac{\text{m}}{\text{perc}}} = 11,25$$

percig látja.

7. Az $f(x) = x^2 + ax + b$ és $g(x) = x^2 + bx + a$ függvényekhez ($a > b$) pontosan egy olyan x_0 hely található, melyben a függvények görbéjéhez tartozó érintők merőlegesek egymásra.

a) Ábrázoljuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényt. (8 pont)

b) Számítsuk ki az $f(x)$ és $g(x)$ függvények görbéje, valamint az y tengely által közbezárt terület nagyságát. (8 pont)

Megoldás. a) A feltételek szerint az $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$ egyenletnek egy megoldása van. $(2x_0 + a)(2x_0 + b) = -1$, azaz $4x_0^2 + 2x_0(a + b) + ab + 1 = 0$. Ez utóbbi egyenletnek akkor és csak akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0.

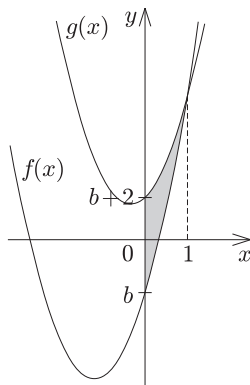
$$4(a + b)^2 - 16(ab + 1) = 0, \quad \text{ahonnan} \quad (a - b)^2 = 4.$$

Mivel $a > b$, azért innen $a - b = 2$, vagyis $a = b + 2$. Ezzel

$$h(x) = x^2 + (b + 2)x + b - x^2 - bx - b - 2 = 2x - 2.$$

b) A két grafikon metszéspontjának abszcisszája $x = 1$; ha $x < 1$, akkor $g(x) > f(x)$. A keresett területet az ábra szemlélteti. A terület mérőszáma:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + bx + b + 2 - x^2 - bx - 2x - b) dx = \\ &= \int_0^1 (2 - 2x) dx = [2x - x^2]_0^1 = (2 - 1) - (0) = 1. \end{aligned}$$



8. András meglátott egy reklámújságban egy igen kedvező árú gesztenyenyuszt. Amikor meg akarta vásárolni, döbbenten tapasztalta, hogy a pénztárnál 66 Ft híján az újságban feltüntetett ár kétszeresét számlázták. Miután panaszt tett, kiderült, hogy az újságban a háromjegyű ár első és harmadik számjegyét véletlenül felcserélték. Mennyit kell fizetnie Andrásnak, ha megveszi az árut? (16 pont)

Megoldás. Ha András az újságban az \overline{abc} árat látta, akkor a feltételek szerint $\overline{cba} = 2 \cdot \overline{abc} - 66$, azaz $\overline{cba} + 66 = 2 \cdot \overline{abc}$. A jobb oldal páros, így a -nak is párosnak kell lennie. $a < 6$, ellenkező esetben ugyanis a jobb oldal 1200-nál nagyobb lenne. Tehát $a = 4$ vagy $a = 2$.

Ha $a = 4$, akkor a bal oldal 0-ra végződik. Ekkor viszont $c = 5$ lehet csak. De ez lehetetlen, hiszen $a = 4$ esetén a jobb oldal 800-nál nagyobb, míg $c = 5$ miatt a bal oldal kisebb, mint 700.

Ha $a = 2$, akkor a bal oldal 8-ra végződik. Ekkor a jobb oldalon $c = 4$ vagy $c = 9$. De $c = 9$ nem lehet, hiszen ekkor a bal oldal 900-nál nagyobb, míg a jobb oldal kisebb, mint 600. Tehát csak $a = 2$, $c = 4$ lehetséges. Ezekkel

$$\overline{4b2} + 66 = 2 \cdot \overline{2b4}, \quad \text{azaz} \quad 468 + 10b = 408 + 20b, \quad \text{ahonnan} \quad b = 6.$$

Tehát az újságban közölt összeg 264 Ft, míg a tényleges ár 462 Ft. Valóban: $2 \cdot 264 - 66 = 462$.

9. a) Adott három párhuzamos egyenes; mindegyiken pirosra festtünk 5 pontot. Tekintsük az összes háromszöget, melyek csúcsai pirosak, két csúcsuk valamelyik egyenesen, a harmadik pedig egy másik egyenesen van; majd tekintsük az összes olyan piros csúcsú négyszöget, melyek két-két csúcsa egy-egy egyenesre illeszkedik. Miből van több: háromszögből vagy négyszögből? (6 pont)

b) Legyen most adva két párhuzamos egyenes; egyikükön n ($n \geq 2$), a másikon pedig $(n + 1)$ piros pont. Ismét képezzük az összes háromszöget, illetve négyszöget, melyek csúcsai pirosak. Most miből van több, háromszögből vagy négyszögből? (10 pont)

Megoldás. a) A háromszögek száma: $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 = 30 \cdot \frac{5!}{2 \cdot 3!} = 300$, a négyszögek száma: $3 \cdot \binom{5}{2}^2 = 3 \cdot \frac{(5!)^2}{2^2 \cdot (3!)^2} = 3 \cdot \frac{20^2}{4} = 300$. Tehát ugyanannyi háromszög keletkezik, mint négyszög.

b) A háromszögek száma: $\binom{n}{2} \cdot (n+1) + \binom{n+1}{2} \cdot n$, a négyszögeké: $\binom{n}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$.

Vizsgáljuk meg, milyen n -re lesz több háromszög, azaz oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\binom{n}{2} \cdot (n+1) + \binom{n+1}{2} \cdot n > \binom{n}{2} \cdot \binom{n+1}{2},$$

$$\frac{n!(n+1)}{2(n-2)!} + \frac{(n+1)!n}{2(n-1)!} > \frac{n!}{2(n-2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2(n-1)!},$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} > \frac{(n-1)n^2(n+1)}{4},$$

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n(n-1)}{4}, \quad \text{ahonnan} \quad 0 > n^2 - 5n + 2.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $n_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx 0,44$, $n_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4,56$.

Azt kaptuk, hogy ha $n = 2, 3$ vagy 4 , akkor háromszögből lesz több, ha pedig $n > 4$, akkor négyszögből.