I. rész

1. *a*) $A = 101^{100^{99}}$, $B = 99^{100^{101}}$. Melyik szám a nagyobb, A vagy B? (*7 pont*)

b) Írja föl az $f(x) = x^2$ függvény azon érintőjének az egyenletét, amelyik az x-tengely pozitív félegyenesével $60°$-os szöget zár be. (*6 pont*)

2. Hol a hiba az alábbi okoskodásokban? Mi az egyenlet megoldása az *a*) esetben és mennyi a szóban forgó valószínűség a *b*) kérdésben?
a) A $\sqrt{x} = -x$ egyenletnek nincs megoldása, mert egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív. (*4 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy hét szabályos kockát feldobva van 1-es a számok között? Annak a valószínűsége, hogy egyetlen szabályos kockával 1-est dobunk, $\frac{1}{6}$. Eszerint annak a valószínűsége, hogy két szabályos kockát feldobva van 1-es a kijött számok között, kétszer ennyi, $\frac{1}{3}$; így tehát a kérdéses valószínűség 7-szer ennyi, $\frac{7}{6}$, az esemény bekövetkezése több, mint bizonyos. (*5 pont*)

c) Egy méter 100 centiméter, tehát $\frac{1}{4}$ méter $= 25$ centiméter. Az $\frac{1}{4}$ négyzetgyöke $\frac{1}{2}$, a 25 négyzetgyöke 5, tehát $\frac{1}{2}$ méter $= 5$ centiméter. (*4 pont*)

3. Egy trapéz magassága, egyik, illetve másik átlója ebben a sorrendben egy $q = 2$ hányadosú mértani sorozat három szomszédos tagja. A trapéz területe $T = \sqrt{60} + \sqrt{12}$ területegység. Mekkora a trapéz magassága? (*12 pont*)

4. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:
a) $2x^4 \leq x^2 + 1$. (*5 pont*)

b) $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$. (*8 pont*)

II. rész

5. *a*) A pozitív egész A és B számok összege 1000. Igazolja, hogy A^2 utolsó három számjegye egyenlő B^2 utolsó három számjegyével. (*4 pont*)

b) Adjon meg olyan pozitív egész A és B számokat, amelyek összege 1000 és A^2 utolsó *négy* számjegye egyenlő B^2 utolsó *négy* számjegyével. (*3 pont*)

c) Hány pozitív osztója van a $H = 2^{24} - 1$ számnak? (*9 pont*)

6. Egy dobozban pénzérmék és golyók vannak, amelyek ezüstből vagy aranyból készültek. A dobozban lévő tárgyak 20%-a golyó, a pénzérmék 40%-a ezüst, az aranytárgyak 80%-a érme.
a) A dobozban lévő tárgyak hány százaléka arany pénzérme? (*4 pont*)

b) A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy tárgyat. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a tárgy ezüstből készült? (*4 pont*)

c) A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a golyó ezüstből készült? (*4 pont*)

d) Értelmezze a *b*) és a *c*) feladatok eredményét a következő eseményekre: E: a kihúzott tárgy ezüstből van; G: a kihúzott tárgy golyó. (*4 pont*)

7. Egy számtani sorozat első tagja 9, a kilencedik tagja pedig 33.
a) Határozza meg a fenti számtani sorozat azon tagjainak az összegét, amelyek 149 és 301 között vannak. (*10 pont*)

b) Mennyi a sorozat első huszonöt elemének a négyzetösszege? (*6 pont*)

8. Egy klinikán olyan betegség kimutatására végeznek vérvizsgálatot, amelyikben száz ember közül átlagosan egy szenved. A vizsgálati személyek ötvenes csoportokban érkeznek és az eddigi gyakorlat szerint egyesével végzik el rajtuk a tesztet. Egyetlen vérminta vizsgálata 300 forintba kerül.

A klinika vezetője két módosító javaslatot kapott:

A) Egy-egy 50-es csoport vérmintáinak egy részét azonosítható módon tegyék félre, a másik részeket pedig öntsék össze és vizsgálják először a csoportos mintát. Ha ez negatív, akkor nyilván mindenki egészséges, ha pozitív, akkor a félretett egyéni mintákat vizsgálják egyesével.

B) Az A) javaslathoz hasonlóan először az 50-es csoport együttes vérmintáját vizsgálják meg. Ha ez pozitív, akkor minden egyes félretett egyéni minta feléből két 25-fős, csoportos mintát készítenek és ezeket ismét együttesen vizsgálják. Ha bármelyik csoport pozitívnak bizonyul, akkor annak a csoportnak a tagjait egyesével szűrik.

A klinika vezetőjeként változtatna-e az addigi gyakorlaton? Ha igen, akkor hogyan és miért? (*16 pont*)

9. Az alábbi feladatok megoldása során kalkulátor *nem* használható. Eredményeit indokolja.

a) 1. Írja föl az $(1+x)^{10}$ hatvány kifejtésének első négy tagjának összegét az x növekvő hatványai szerint rendezve. (*2 pont*)

2. A talált kifejezés alapján adjon közelítést $1{,}005^{10}$ értékére. (*1 pont*)

3. Igazolja, hogy az így kapott közelítés négy tizedesjegyre pontos. (*5 pont*)

b) 1. Ábrázolja az $f(x)=\dfrac{1500x+1}{500x-2}$ függvény grafikonját, ha $x>1\,000$. (*2 pont*)

2. Határozza meg az

$$\frac{1500x+1}{500x-2}=\frac{3x}{10\,000}$$

egyenlet pozitív megoldásának az egész részét. (*6 pont*)