

William Lowell Putnam, az 1882-ben végzett egykori harvardi diák egy cikket írt a harvardi öregdiákok 1921 decemberi évkönyvében, amelyben lelkesen ecsetelte egy egyetemek közti csapatverseny várható hozadékait. Hogy egy ilyen verseny valóban létrejöhesse, azt Putnam özvegye, *Elizabeth Lowell Putnam* 1927-ben létrehozott alapítványa tette lehetővé. Kezdetben az angol nyelv volt a verseny tárgya és néhány évvel később kísérleti jelleggel iktatták be a matematikát is. Jelenlegi formájában 1938 óta kerül rá sor minden év decemberének első szombatján. 1962-től kezdve a versenyen 12 feladatot tűznek ki, amelyeket hagyományosan **A1**-től **A6**-ig, illetve **B1**-től **B6**-ig számoznak. A két feladatsor megoldására három-három óra áll a versenyzők rendelkezésére. A versenyen minden, még nem végzett amerikai és kanadai egyetemi hallgató részt vehet, bár egy diák sem indulhat négynél több alkalommal.

A verseny egyéni, de minden olyan egyetem vagy főiskola, ahonnan legalább hárman elindulnak, kijelölhet egy háromtagú csapatot a verseny előtt; az ő összesített pontszámuk adja a csapat eredményét.

Az első öt helyezett csapatot felkészítő oktatási intézmény matematika tanszéke komoly pénzdíjban részesül. A győztes jutalma 25 000, a további négy helyezetté pedig rendre 20, 15, 10, illetve 5 ezer dollár; a győztes csapat tagjai fejenként 1000, a további helyezettek pedig 800–600–400, illetve 200 dollár díjat kapnak. Az egyéni verseny első 5 helyezettjét nem rangsorolják külön: valamennyien a *Putnam Fellow* címet nyerik, ami 2500 dolláros pénzdíjat is jelent; az utánuk következő 10–10 versenyző pedig fejenként 1000, illetve 250 dollár díjban részesül.

Sok sikert kívánunk olvasóinknak a feladatok megoldásához. A Putnam versennyel kapcsolatos információk megtalálhatók a verseny honlapján:

<http://math.scu.edu/putnam/index.html>

A1. A kosárlabdafenomén Shanille O'Keal csapatának statisztikusa folyamatosan nyilvántartja, hogy Miss O'Kealnek a mezőnyből végrehajtott N kísérletéből hány végződött kosárral. Az idény elején a sikeres dobások $S(N)$ száma alacsonyabb volt N nyolcvan százalékánál, a bajnokság végére viszont ez az arány nyolcvan százalék fölé emelkedett. Volt-e időközben feltétlenül olyan pillanat, amikor $S(N)$ éppen egyenlő volt az addigi N dobókísérlet nyolcvan százalékával?

A2. H_1 és H_2 két háromszög, oldalai hossza rendre a_i, b_i, c_i , a területük pedig T_i ($i = 1, 2$). Ha $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2$, továbbá H_2 hegyesszögű, akkor igaz-e, hogy $T_1 \leq T_2$?

A3. Az u_n sorozatot a következőképpen definiáljuk: $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ és minden $n \geq 0$ esetén

$$\det \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n!.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei egész számok. (Definíció szerint $0! = 1$.)

A4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számhoz van olyan N egész szám, hogy az $x_1 x_2 \cdots x_n$ szorzat felírható

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \sum_{i=1}^N c_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n)^n$$

alakban, ahol c_i racionális, az a_{ij} számok pedig a $-1, 0, 1$ számok közül valók.

A5. Egy $m \times n$ -es sakktáblát véletlenszerűen kiszínezzünk: minden egyes mező színe a többiétől függetlenül $1/2$ valószínűséggel piros vagy fekete. Azt mondjuk, hogy két mező, p és q egyszínű tartományban vannak, ha létezik élből szomszédos mezőknek olyan sorozata, amelyik p -vel kezdődik, q -ig tart és a sorozat mezői azonos színűek. Bizonyítsuk be, hogy az egyszínű tartományok számának a várható értéke nagyobb, mint $\frac{mn}{8}$.

A6. Legyen az $f(x; y)$ folytonos valós értékű függvény a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ egységnégyzeten. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x; y) dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x; y) dy \right)^2 dx \leq \\ & \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x; y) dx dy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 [f(x; y)]^2 dx dy. \end{aligned}$$

B1. Tegyük föl, hogy az r racionális szám gyöke a $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$ egész együtthatós polinomnak, azaz $P(r) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi n darab szám mindegyike egész:

$$c_n r, \quad c_n r^2 + c_{n-1} r, \quad c_n r^3 + c_{n-1} r^2 + c_{n-2} r, \quad \dots, \quad c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r.$$

B2. Bizonyítsuk be az n és az m pozitív egész számokra, hogy

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{n!}{n^n}.$$

B3. Határozzuk meg azokat az $a > 0$ valós számokat, amelyekhez van olyan, a $[0; a]$ intervallumon értelmezett nem negatív értékű $f(x)$ folytonos függvény, hogy az

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

tartomány kerülete k hosszúságegység, területe pedig k területegység valamilyen k valós számra.

B4. Az $n \geq 2$ pozitív egész számra legyen $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben a $P_k(k, 0)$ pontokat ($k = 1, 2, \dots, n$). Az R_k transzformáció az óramutató járásával ellenkező irányban θ szöggel forgatja el a sík pontjait a P_k pont körül. Legyen R az ebben a sorrendben végrehajtott $R_1, R_2, \dots, R_n$ forgatások egymásutánja. A sík tetszőleges $(x; y)$ pontjára határozzuk meg és írjuk a legegyszerűbb alakba az $R(x; y)$ pont koordinátáit.

B5. Határozzuk meg a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \right)^{x^n}$$

határértéket.

B6. Tekintsük a pozitív egészek egy nem üres A részhalmazát és legyen $N(x)$ az A halmaz x -nél nem nagyobb elemeinek a száma. Jelölje B azoknak a b pozitív egészeknek a halmazát, amelyek felírhatók $b = a - a'$ alakban, ahol $a \in A$ és $a' \in A$. Legyenek a B halmaz elemei nagyság szerint növekvő sorrendben $b_1 < b_2 < \dots$. Bizonyítsuk be, hogy ha a $b_{i+1} - b_i$ sorozat nem korlátos, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = 0$.