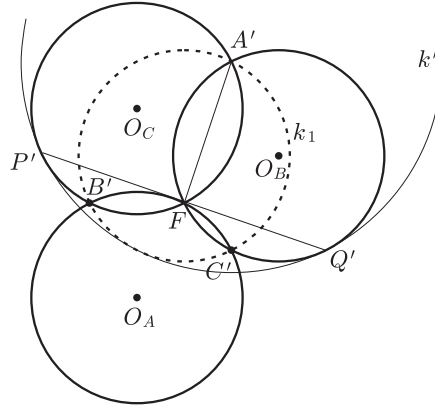


1. feladat. Adott a síkban az ABC háromszög, melynek körülírt körét kívülről érinti a k kör. A k kör érinti egyúttal az AB és AC félegyeneseket is, mégpedig a P , illetve Q pontban. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontja egybeesik az ABC háromszög BC oldalához hozzáírt körének középpontjával.

I. megoldás. Alkalmazzunk inverziót az A -val szemközti hozzáírt körre, melynek középpontját F jelöli. Az ABC háromszög oldalai (mivel érintik e kört) mind azonos sugarú körökbe transzformálódnak. Feltéhetjük, hogy ez a sugár egységnyi, és a megfelelő körök középpontjai O_A, O_B és O_C . Az ABC körülírt körének a képe az A', B' és C' pontokon átmenő k_1 kör lesz. (A vesszős változat az adott pont inverzió utáni képet jelöli.)

Azt állítjuk, hogy a k_1 kör szintén egységnyi sugarú. O_A, O_B és O_C ugyanis egyaránt egységnyi távolságra vannak az F -től, így a rajtuk átmenő kör sugara is egységnyi. Az $O_A O_B O_C$ háromszög oldalfelezőpontjai által meghatározott háromszög körülírt körének sugara tehát $\frac{1}{2}$. E háromszög csúcsai az FA', FB' és FC' szakaszok felezőpontjai, tehát az említett $\frac{1}{2}$ sugarú kört egy F középp. 2-szeres nagyítás a k_1 -be viszi, mely így csakugyan egységsugarú.



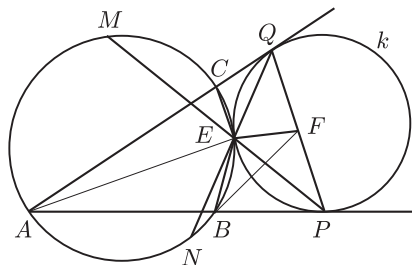
Az A' körüli 2 egység sugarú kör belülről érinti az AB , ill. AC oldalak képeit és a körülírt kör képét is, így e kör éppen k képe lesz az inverzió során. A P', Q' pontok pedig az A' -vel átellenes pontok a megfelelő egységsugarú körökön, ezért $A'FP'$ és $A'FQ'$ egyaránt derékszögek, továbbá F (a szimmetria miatt) felezi $P'Q'$ -t. Mivel F volt az inverzió középpontja, F egyúttal a PQ szakaszt is felezi. $\square$

Megjegyzések. 1. Hasonlóan a tavalyi verseny első feladatához, idén sem volt haszontalan a síkbeli inverzió tulajdonságainak ismerete (jóllehet tavaly többen próbálkoztak az alkalmazásával). A versenybizottság fenntartja magának az inverzióval (is) megoldható példa kitűzésének jogát.

2. A feladat szoros rokonságot mutat az 1978. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kitűzött 4. feladattal. A különbség lényegében annyi, hogy az olimpiai feladatban a k kör *belülről* érintett, és az érintési pontok alkotta szakasz felezőpontja a *beírt* kör középpontja volt. Az említett feladatra megjelent¹ egyik szellemes megoldás ötlete könnyen alkalmazható a mi esetünkre is. Ezt vázoljuk az alábbiakban.

3. Több versenyző próbálkozott az analitikus módszerrel. Természetesen így is teljes értékű megoldás kapható, azonban viszonylag kevesen jártak sikerrel.

II. megoldás. Legyen E a k kör és az ABC háromszög körülírt körének érintési pontja, M , ill. N pedig a PE , ill. QE egyeneseknek és a háromszög körülírt körének E -től különböző metszéspontja. Mivel E -ből a k kört egy középpontos hasonlóság viszi az ABC háromszög körülírt körébe, az M -ben, ill. N -ben a körülírt körhöz húzott érintők párhuzamosak AB -vel, ill. AC -vel. Eszerint M felezi a C -t tartalmazó AB ívet, N pedig felezi a B -t tartalmazó AC ívet.



Felhasználva a kerületi szögek egyenlőségét, illetve hogy feleakkora ívhez feleakkora kerületi szög tartozik

$$\angle MEB = \angle MEA + \angle AEB = \frac{\beta + \alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi + \gamma}{2}$$

¹Id. Reiman – Dobos: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák* 1959–2003 (328–332. oldal)

adódik, ahonnan

$$BEP\angle = \pi - MEB\angle = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.)

Világos, hogy $ABEC$ húrnégyszög, így a konkáv $BEC\angle$ nagysága $\pi + \alpha$. Legyen F az iménti szög felezőjének és a PQ szakasznak a metszéspontja. Eszerint

$$BEF\angle = \frac{\pi + \alpha}{2}, \quad \text{és} \quad APF\angle = \frac{\pi - \alpha}{2},$$

hiszen az AQP háromszög egyenlő szárú. Azt kaptuk, hogy $FEBP$ húrnégyszög, melyben a PF íven nyugvó kerületi szögre

$$PBF\angle = PEF\angle = BEF\angle - BEP\angle = \frac{\pi + \alpha}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Az adódott tehát, hogy BF az ABC háromszög B -nél lévő külső szögének a felezője.

A fenti számolás értelemszerű módosításával adódik, hogy CF az ABC háromszög C -nél lévő külső szögfelezője. A két külső szögfelező F metszéspontja egyfelől a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja, másfelől rajta van az ABC háromszög A -ból induló szögfelezőjén. E szögfelező azonban felezi az egyenlő szárú APQ háromszög alapját, az állítást igazoltuk. $\square$

2. feladat. Határozzuk meg a legkisebb olyan, 2004-től különböző, pozitív egész n számot, amelyhez létezik olyan egész együtthatós $f(x)$ polinom, hogy az $f(x) = 2004$ egyenletnek legalább egy, az $f(x) = n$ egyenletnek pedig legalább 2004 különböző egész megoldása van.

Megoldás. Legyen $g(x)$ egy kívánt tulajdonságú polinom a feladatbeli n számhoz. Létezik tehát olyan a egész, melyre $g(a) = 2004$. Defináljuk a $g_1(x) := g(x + a)$ polinomot. Nyilván $g_1(0) = g(a) = 2004$, azaz $g_1(x)$ konstans tagja 2004, továbbá a $g_1(x) = n$ egyenletnek léteznek különböző, $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$ egész gyökei, melyek egyike sem 0, mivel $g_1(0) = 2004$. Ez azt jelenti, hogy

$$g_1(x) - n = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2004}) \cdot g_2(x),$$

ahol a polinomosztás miatt a $g_2(x)$ polinom is egész együtthatós, konstans tagja legyen c . Az egyenlőségben szereplő két polinom konstans tagjai megegyeznek, így persze

$$|2004 - n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_{2004}| \cdot |c|,$$

ahonnan, felhasználva, hogy $c \neq 0$, kapjuk, hogy

$$|2004 - n| \geq |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_{2004}| \geq |1| \cdot | -1| \cdot |2| \cdot | -2| \cdot \dots \cdot |1002| \cdot | -1002|.$$

Innen látszik, hogy $0 < n < 2004$ nem lehetséges, ezért a fenti egyenlőtlenségből $n \geq (1002!)^2 + 2004$ következik.

Legyen most a $g(x)$ polinom a következő:

$$g(x) := -(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) \dots (x - 1002)(x + 1002) + (1002!)^2 + 2004.$$

Erre a polinomra $g(0) = 2004$ és

$$g(\pm k) = (1002!)^2 + 2004$$

minden $1 \leq k \leq 1002$ egészre, vagyis a feladat kérdésére a válasz

$$n = (1002!)^2 + 2004. \quad \square$$

3. feladat. Egy körvonal mentén néhány kék és piros pontot helyeztünk el. Ezekkel az alábbi műveleteket végezhetjük:

(a) valahova beillesztünk egy új piros pontot, és a két szomszédját ellentétes színűre változtatjuk.

(b) ha legalább három pont van, és ezek közül legalább az egyik piros, akkor egy piros pontot törölünk, a két szomszédját pedig ellentétes színűre változtatjuk.

Kezdetben két pont van a kör kerületén, mindkettő kék. Elérhetjük-e a lépések többszöri alkalmazásával, hogy újra két pontunk legyen, de azok pirosak legyenek?

I. megoldás. A piros és kék pontok a kört ívekre osztják; írjunk minden ívre $(+1)$ -et vagy (-1) -et úgy, hogy a piros pontok két oldalán egyenlő, a kék pontok két oldalán pedig ellentett számok álljanak. Mivel a kék pontok száma minden lépésben párossal változik, ezért mindig páros sok kék pont van a körvonalon. Az ívek fenti számozása tehát kétféleképpen végezhető el, és az egyik számozásból úgy kapjuk a másikat, hogy minden íven előjelet váltunk. Megmutatjuk, hogy az ívekre írt számok összege minden lépés után osztható marad 3-mal. A kezdeti állapotban ez igaz, mert egy $(+1)$ -et és egy (-1) -et adunk össze.

Ha egy lépésben egy i ívre piros pontot ültetünk, akkor a beillesztett piros pont szomszédjainak színe megváltozik, ezért a lépés előtti ívszámozásból helyes ívszámozást kapunk, ha a beillesztett piros pont két oldalán keletkező részívekre az i ívre írt szám ellentettjét írjuk, a további íveken pedig megtartjuk a számozást. Piros pont törlésekor fordítva járunk el. Az ívekre írt számok összege mindkét esetben 3-mal változik, tehát ha korábban 3-mal osztható volt az összeg, úgy ez a lépés után is így marad.

Ha néhány lépés után két piros pont marad, akkor két egyenlő szám kerül a kör területére, melyek összege nem osztható 3-mal. Ezt az állapotot tehát nem lehet elérni. $\square$

II. megoldás. Ismét azt igazoljuk, hogy nem kaphatunk két piros pontot az adott lépésekkel. Feleltessünk meg a pontoknak egy-egy geometriai transzformációt: a kék pontok jelentsék a t -vel jelölt tengelyes tükrözést az x -tengelyre, a piros pontok pedig az f -fel jelölt, origó körüli, 120° -os elforgatásnak feleljenek meg.

Megmutatjuk, hogy azokban a pontrendszerekben, amelyek két kék pontból kiindulva előállíthatóak, a pontoknak megfeleltetett egybevágósági transzformációk szorzata – tetszőleges kék vagy piros pontból indulva és pozitív körüljárás szerint haladva – a minden pontot fixen hagyó, identikus transzformáció. Ez a kezdeti állapotban (két tükrözés) teljesül. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy a lépések megőrzik ezt a tulajdonságot, hiszen két piros pontra a megfelelő egybevágóságok szorzata egy -120° -os forgatás.

Először is figyeljük meg, hogy ha egy rögzített kék vagy piros p pontból kiindulva a megfelelő transzformációk szorzata minden pontot helyben hagy, akkor tetszőleges p' ponttól kezdve a transzformációk elvégzését, szintén az identikus transzformációt kapjuk. Ez azért igaz, mert ha p -tól p' -ig (pozitív körüljárás szerint) a transzformációk szorzata egy τ egybevágóság, akkor a p'/p íven a szorzat szükségképpen a τ^{-1} inverz leképezés. Ha viszont p' -ből indulunk, akkor a szorzat transzformációt úgy kapjuk, hogy először a τ^{-1} , majd a τ transzformációt végezzük el, ám ez a leképezés-sorozat is minden pontot helyben hagy.

Tegyük tehát fel, hogy valamely állapotban a transzformációk szorzata az identitás, és tekintsünk egy tetszőleges lépést. A lépés négyféle lehet:

$$ff \Leftrightarrow tft, \quad ft \Leftrightarrow tff, \quad tf \Leftrightarrow fft, \quad tt \Leftrightarrow fff;$$

a transzformációk szorzata egyik esetben sem változik, ha a kiindulópont a megváltozott pontokon kívülre esik, tehát legalább egy esetben. Láttuk, hogy a transzformációk szorzata ekkor bármely kiinduló pontból az identitás lesz, amivel állításunkat igazoltuk. $\square$