## I. rész

**1.** *Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre*

$$\left.\begin{aligned}\left(x^2+5\right)^2&=25-|y-3|\\ 21x+63y&=188\end{aligned}\right\}. \qquad (11\ pont)$$

**Megoldás.** Az első egyenletből: $\left(x^2+5\right)^2 \geq 25$, $25-|y-3| \leq 25$. Így az első egyenlet megoldása csak $x=0$, $y=3$ lehet. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

$$21\cdot 0+63\cdot 3=189\neq 188.$$

Az egyenletrendszernek tehát nincs megoldása.

**2.** *Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett*

$$f(x)=ax^2+(2a+b)x-\left(b^2-b-a\right)$$

*függvényt.*

*a) Mutassuk meg, hogy ha $a$ és $b$ egész számok, akkor*

$$f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$$

*osztható 5-tel.*

*b) Igazoljuk, hogy ha $a$ pozitív, akkor $f(x)$-nek van zérushelye.* (*12 pont*)

**Megoldás.** *a*) Az állítás tetszőleges egész együtthatós polinomra igaz: ha $f(x)=Ax^2+Bx+C$, akkor $f(-2)+f(2)=8A+2C$, $f(-1)+f(1)=2A+2C$, tehát a szóban forgó összeg $10A+5C$, ami valóban osztható 5-tel.

*b*) A diszkrimináns $b^2+4ab^2$, ami nem negatív, ha $a>0$.

**3.** *Hány darab 2-nél kisebb, pozitív tagja van az $a_n=-5+\log_2(n+4)$ sorozatnak?* (*14 pont*)

**Megoldás.** A következő egyenlőtlenségrendszer pozitív egész megoldásainak a számát kell meghatároznunk: $0<-5+\log_2(n+4)<2$, azaz $5<\log_2(n+4)<7$.

Az 5 és a 7 logaritmus segítségével felírható: $\log_2 32<\log_2(n+4)<\log_2 128$.

A 2-es alapú logaritmus függvény növekedő, ezért: $32<n+4<128$, vagyis $28<n<124$.

A megfelelő $n$ értékek: $29, 30, \ldots, 122, 123$, vagyis 95 db pozitív egész szám a megoldása az egyenlőtlenségrendszernek. Ez azt jelenti, hogy az $a_{29}, a_{30}, \ldots, a_{123}$ az a 95 darab tagja a sorozatnak, amely megfelel a feladat feltételeinek.

**4.** *Ágnes 2005. március 25-én befizet 600 000 Ft-ot egy olyan bankba, ahol az évi kamat 8%-os és a naptári év végén van kamatelszámolás. Mennyi lesz a követelése 2006. március 25-én?* (*14 pont*)

**Megoldás.** Az év végi megszakítás nem befolyásolja a kamatjóváírást. Ha az év 84. napján teszi be a pénzt, akkor abban az évben 281 napig kamatozik. Ha év végén a kamatot hozzáírják a betéthez, akkor év végén a tőke $1{,}08^{\frac{281}{365}}$-szörösére nő, majd a hátrelévő 84 napon $1{,}08^{\frac{84}{365}}$-szörösére. Ez azt jelenti, hogy 2006. március 25-én, az év leteltével $600\,000\cdot 1{,}08=648\,000$ forint lesz Ágnes követelése.

## II. rész

**5.** *Adott három egyenes az egyenletével:*

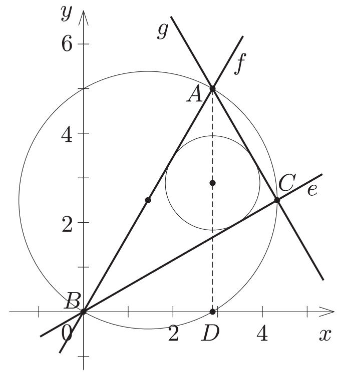
$$x-\sqrt{3}y=0, \quad \sqrt{3}x-y=0, \quad \sqrt{3}x+y-10=0.$$

*a) Mutassuk meg, hogy a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.*

*b) Mekkora a háromszög köré írt körének a sugara?*

*c) Számítsuk ki a beírt kör középpontjának a koordinátáit.* (*16 pont*)

**Megoldás.** *a*) Az első és a második egyenesre illeszkedik az origó, a harmadikra nem, így a három egyenes háromszöget határoz meg. Az $e$ egyenes meredeksége: $m_e=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, a $g$ egyenesé: $m_g=-\sqrt{3}$. Mivel $m_e m_g=-1$, azért az $e$ és $g$ merőlegesen metszi egymást, a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.




$b$) Derékszögű háromszögben (a Thalész-tétel alapján) az átfogó hosszának felével azonos hosszúságú a köré írt kör sugara. Az $f$ és a $g$ egyenes metszéspontját kiszámítjuk: $A\left(\frac{5}{\sqrt{3}};5\right)$. Az $e$ és az $f$ metszéspontja: $B(0;0)$. Innen adódik, hogy a háromszög átfogója, $AB=\frac{10}{\sqrt{3}}$, azaz a köré írt kör sugara: $r=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

$c$) Legyen $e$ és $g$ metszéspontja $C$, továbbá az $A$ merőleges vetülete az $x$ tengelyre $D$. Az egyenesek meredekségeit (irányszögeit) felhasználva: $ABC\sphericalangle=30°$. A $B$-ből induló belső szögfelezőre illeszkedik a beírt kör középpontja. Mivel $ABD\sphericalangle=60°$, így a $B$-ből induló szögfelező irányszöge $45°$, vagyis az $y=x$ egyenesre illeszkedik a középpont. A $BDA$ derékszögű háromszögben $BAD\sphericalangle=30°$, az $ABC$ derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle=60°$. Ez azt jelenti, hogy az $ABC$ háromszögben az $A$-ból induló szögfelező az $AD$ egyenes. A beírt kör középpontjának erre is illeszkednie kell, vagyis a második koordinátája $\frac{5}{\sqrt{3}}$. Mivel a középpont $y=x$-re is illeszkedik, azért koordinátái $\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

**6.** *Adott a valós számokon értelmezett, $f(x)=2x^6-3x^4+x^2$ függvény.*

*a) Határozzuk meg $f\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$ pontos értékét.*

*b) Mutassuk meg, hogy az $f(\sin\alpha)+f(\cos\alpha)$ összeg nem függ $\alpha$ értékétől.* *(16 pont)*

**Megoldás.**

$a$)
$$f\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sqrt{3}\right)^6-3\left(\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3}\right)^2=2\cdot 27-3\cdot 9+3=30.$$

$b$)
$$f(\sin\alpha)+f(\cos\alpha)=(2\sin^6\alpha-3\sin^4\alpha+\sin^2\alpha)+(2\cos^6\alpha-3\cos^4\alpha+\cos^2\alpha)=$$
$$=2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha).$$

A zárójelben lévő összegeket alakítsuk át. Tudjuk, hogy

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$f(\sin\alpha)+f(\cos\alpha)=2(1-3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha)-3(1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)+1=0,$$

ami valóban nem függ $\alpha$-tól.

**7.** *Egy középiskolában azt tapasztaltuk, hogy a tanulók 75%-a elkészíti a házi feladatát matematikából. Egy újságíró ebben az iskolában öt véletlenszerűen választott tanulóval szeretne beszélgetni a tanulási szokásaikról.*

*a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy olyan tanulókat választ, akiknek készen van a házi feladata?*

*b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az öt választott tanulóból legalább háromnak készen van a házi feladata?*

*c) Az iskola 20 fős 12.c. osztályában (ahol az iskolai átlagnál egy kicsit jobb a helyzet) 16-an írtak házi feladatot. A csoportban összesen 3 leány van, ők mindig elkészítik feladataikat. Ha ebből a csoportból választunk 4 fiút és 1 leányt, akkor mekkora a valószínűsége, hogy a választottak közül pontosan kettőnek nincs kész a házi feladata?* *(16 pont)*

**Megoldás.** $a$) Egy tanuló esetén 0,75 a valószínűsége annak, hogy készen van a házi feladata. Feltéve, hogy a tanulók viselkedése független, $0{,}75^5\approx 0{,}2373$ annak a valószínűsége, hogy mind az öt tanuló elkészítette a feladatát.

$b$) A szóban forgó esemény a következő, egymást kizáró módokon valósulhat meg:

Pontosan öt tanuló írt házi feladatot: $0{,}75^5 \approx 0{,}2373$.

Pontosan négy tanuló írt házi feladatot: $\binom{5}{4} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}3955$.

Pontosan három tanuló írt házi feladatot: $\binom{5}{3} \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}2637$.

A fenti valószínűségek összege 0,8965, ennyi a valószínűsége annak, hogy az öt választott tanulóból legalább háromnak készen van a házi feladata.

$c$) 4 fiút és 1 leányt összesen $\binom{17}{4} \cdot \binom{3}{1} = 7140$-féle módon választhatunk ki.

Lányt háromféleképpen tudunk választani, és ő biztosan írt házi feladatot. A feladat szövege szerint az a két fő, aki nem írt házi feladatot csakis fiú lehet. Tudjuk, hogy a 17 fiú közül összesen 4-en nem írtak leckét. Vagyis a 13 leckét író fiú közül kell kettőt, és a 4 leckét nem író fiú közül kell szintén kettőt kiválasztani. Ez összesen $\binom{3}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} = 1404$ eset.

Vagyis $\frac{1404}{7140} \approx 0{,}1966$ a valószínűsége annak, hogy a választott tanulók közül pontosan kettőnek nincs kész a házi feladata.

**8.** *Egy 27 méter széles folyó partjától merőlegesen haladva 3 méterenként megmértük a víz mélységét. A következő adatokat kaptuk centiméterben:* 60, 120, 150, 240, 210, 180, 90, 30.

$a$) *Hány* $\mathrm{m}^2$ *a keresztmetszet területe, ha a folyómeder alján két méréshely között az összekötővonalat egyenesnek feltételezzük?*

$b$) *A mért adatoknak határozzuk meg a számtani közepét és a mediánját.*

$c$) *Mennyi a mérés vonalában a folyó átlagos mélysége?*

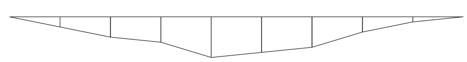
$d$) *Mekkora vízmennyiség halad át a folyó keresztmetszetén* 1 óra *alatt, ha a folyó sebessége* 85 m/perc? (*16 pont*)

**Megoldás.** $a$) Két háromszög és hét trapéz területösszegét kell meghatároznunk:

$$T = 3 \cdot \left( \frac{0{,}6}{2} + \frac{0{,}6+1{,}2}{2} + \frac{1{,}2+1{,}5}{2} + \frac{1{,}5+2{,}4}{2} + \frac{2{,}4+2{,}1}{2} + \frac{2{,}1+1{,}8}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1{,}8+0{,}9}{2} + \frac{0{,}9+0{,}3}{2} + \frac{0{,}3}{2} \right),$$

azaz $T = 32{,}4\ \mathrm{m}^2$.



$b$) Az adathalmaz számtani közepe: 1,35 m. Az adatok sorba rendezése után az 1,2 és az 1,5 m áll középen, vagyis a medián is 1,35 m.

$c$) Ha a folyó keresztmetszetének területét elosztjuk a folyó szélességével, akkor azt az értéket kapjuk, amellyel, mint *„átlag"*-gal meghatározhatjuk a folyó keresztmetszetén 1 óra alatt áthaladó víz mennyiségét. Most ez $\frac{32{,}4}{27} = 1{,}2$ méternek adódik.

$d$) A folyó keresztmetszetének területe: $32{,}4\ \mathrm{m}^2$. Mivel a sebessége 85 m/perc, azért 1 óra alatt 5100 métert halad a folyó. A keresztmetszetén $5100 \cdot 32{,}4 = 165\,240\ \mathrm{m}^3$ víz halad át óránként.

**9.** *Az azonos kerületű konvex négyszögek esetén a két-két szemközti oldal összegének szorzata milyen esetben lesz maximális? Határozzuk meg ezt a maximális értéket.* (*16 pont*)

**Megoldás.** Jelöljük az oldalak hosszát a szokásos $a$, $b$, $c$ és $d$ betűkkel. Ekkor $k = a + b + c + d$. A feladat szövege szerint az $(a + c)(b + d)$ szorzatot kell vizsgálnunk.

Írjuk fel $(a + c)$-re és $(b + d)$-re (két pozitív számra) a mértani és a számtani közép közötti összefüggést:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \le \frac{(a+c)+(b+d)}{2} = \frac{k}{2}.$$

Ebből következik, hogy

$$(a+c)(b+d) \le \frac{k^2}{4}.$$

A szorzat akkor a legnagyobb, ha egyenlő $\frac{k^2}{4}$-gyel. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a + c = b + d$. Vagyis az azonos kerületű konvex négyszögek esetén a két-két szemközti oldal összegének szorzata érintőnégyszögek esetén lesz maximális. Ez a maximális érték $\frac{k^2}{4}$-gyel egyenlő.