

Az aranymetszés

Számrendszerünk, méréseink alapja az egyenlő részekre való osztás, például a kettes számrendszerben a felezés. Így kapunk egyre kisebb részeket, amelyekkel aztán tetszőleges adatot közelíthetünk. A kettes számrendszerben minden számjegy helyi értéke az előtte állónak fele, és kétszer akkora, mint a mögötte állóé. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha olyan helyi értékekkel dolgozunk, amelyek közül két szomszédos összege egy harmadikkal egyenlő. Például – az egységnyi helyi érték bal szomszédját A -val, jobb szomszédját a -val jelölve – ezekre és az 1-re teljesüljön

$$(1) \quad A = 1 + a.$$

Mivel azt most is meg szeretnénk tartani, hogy a szomszédos helyi értékek aránya állandó legyen, ez azt jelenti, hogy

$$(2) \quad a : 1 = 1 : (1 + a).$$

Ez nyilván legfeljebb csak egy pozitív a számra teljesülhet, hiszen ha egy a -ra teljesül, akkor minden $0 < x < a$ számra a (2) jobb oldala nagyobb, mint a bal oldala:

$$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+a} = a > x,$$

és $x > a$ mellett sem állhat fenn egyenlőség:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+a} = a < x.$$

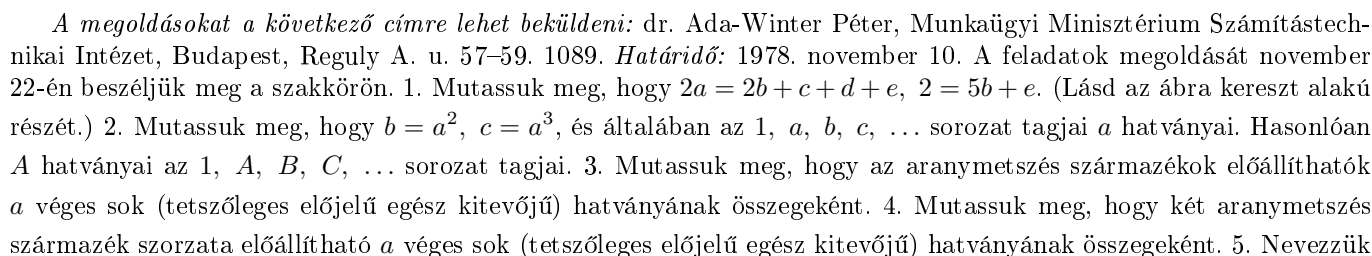
Ez az ún. aranymetszés egyenlete, mellyel már a régi görögök is foglalkoztak a szabályos tíszög szerkesztésével kapcsolatban.



Mint ismeretes, ha C_1, C_2, C_3 az egységnyi sugarú, O középpontú körbe írt szabályos tíszög csúcsai, és C_2C_3 egyenese az OC_1 sugár meghosszabbítását M -ben metszi, akkor $MC_1 = C_1C_2$, és a C_3MO háromszög hasonló a C_2OC_3 háromszöghöz. Emiatt a $C_1C_2 = a$ számra épp a (2) egyenlet teljesül. Ha a C_1C_3 szakasz hosszát p -vel jelöljük, a C_3 pontnak a C_1 középpontú, M -en át-menő körre vonatkozó hatványa alapján

$$p^2 - a^2 = a(1 + a),$$

ami viszont (2) alapján 1-gyel egyenlő. Ennek alapján ha PQ, PR a P középpontú, egységnyi sugarú kör egymásra merőleges sugarai, és PQ felezőpontja S , akkor az S körüli, R -en átmenő kör PQ -nak P -n túli meghosszabbítását abban a T pontban metszi, amelyre $TP = a$, $TR = p$. Valóban, ha ez a kör PQ -nak Q -n túli meghosszabbítását U -ban metszi, akkor a TPR, RPU háromszögek hasonlósága alapján azt kapjuk, hogy a $TP = QU = a$ távolságra is teljesül (2), és a TPR háromszögben $1 + a^2 = p^2$.



arany-egészeknek mindazokat a valós számokat, amelyek előállíthatók a véges sok (tetszőleges előjelű egész kitevőjű) hatványának összegeként. Alakítsunk ki szubrutin-családot az arany-egészek közti műveletek elvégzésére. Legyen K és N általunk választott, a gépi konfigurációnak megfelelő természetes szám. Azokat az arany-egészeket fogjuk megengedettnek tekinteni, amelyek felírhatóak $\sum_{i=-N}^N c_i a^i$ alakban, ahol $|c_i| \leq K$ egész szám. Minden egyes arany-egésznek

feleltessünk meg egy $(2N + 1)$ méretű tömböt, ebben tartsuk a $c_{-N}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_N$ együtthatókat.

- Az IDENT nevű szubrutin két arany-egészről döntse el, hogy egyenlőek-e.
- Az ADD nevű szubrutin adjon össze két arany-egészet. (Ha az eredmény nem megengedett szám, adjon hibajelzést, és állítsa le a futást.)
- A MULT nevű szubrutin szorozzon össze két arany-egészet. (Hasonlóan adjon hibajelzést, ha kell.)
- Mondjuk azt, hogy egy arany-egész kanonikus alakú, ha benne $|c_i| \leq 1$, és a 0-tól különböző együtthatók előjele egyenlő. Írjunk szubrutint, amely tetszőleges arany-egészet kanonikus alakra hoz.
- Írjunk szubrutint, amely tetszőleges valós számhoz megkeresi a hozzá legközelebb levő megengedett arany-egészet.

*

Az 1978. évi 5. számban kitűzött feladatok és megoldásai

- Állítsa elő a harmadik, negyedik és ötödik gyököket közelítő sorozat Newton-Raphson képleteit.

Megoldás.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{1}{3} \left(2x_i + \frac{a}{x_i^2} \right); & x_{i+1} &= \frac{1}{4} \left(3x_i + \frac{a}{x_i^3} \right); \\ x_{i+1} &= \frac{1}{5} \left(4x_i + \frac{a}{x_i^4} \right). \end{aligned}$$

- Készítsen szubrutint, amely Newton-Raphson eljárással négyzetgyök közelítő értéket számít. Az NR2 azonosítójú szubrutin átveszi az A-val jelölt alapot, a Q-val jelölt kezdőértéket és a hibakorlátot.

Megoldás. A MASTER PR15 csekély átalakításával (amelyet nem közlünk) az alábbi szubrutin is hívható:

ccc

```

SUBROUTINE NR2(A,Q,EPS,B,N)
      WRITE (3,3)
      N=0
      X1=Q
2      IF (ABS(X1**2-A)-EPS) 1,1,0
      X2=(X1+A/X1)/2.
      N=N+1
      IF (ABS(X1-X2)-EPS) 1,1,0
      X1=X2
      GO TO 2
1      B=X2
      RETURN
3      FORMAT(///10X,23HNEWTON-RAPHSON MÓDSZER:)
      END
```

- Melyek a Newton-Raphson eljárás alkalmazhatóságának szükséges feltételei?

Megoldás. Miután eddig tárgyalt példáink csak egyszerű hatványfüggvényekre szorítkoztak, a kérdés is csak ilyen függvényekre értendő. Ilyen esetekben, mivel a folytonosság, deriválhatóság és egyéb lényeges tulajdonságok adottak, elég kikötnünk, hogy a közelítés intervallumában az első derivált ne váljon sehol sem zérussá.