

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Legyen a_n a $\sqrt{n}$ -hez legközelebbi egész. Mennyi a következő összeg értéke:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}.$$

2. Az $ABCD$ konvex négyszög belsejében az M pont úgy helyezkedik el, hogy $ABMD$ paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy ha $CBM \sphericalangle = CDM \sphericalangle$, akkor $ACD \sphericalangle = BDM \sphericalangle$.

3. Mutassuk meg, hogy semmilyen pozitív m egészre sem lehet $1978^m - 1$ osztható $(1000^m - 1)$ -gyel.

4. Az R sugarú körbe egy S területű, n oldalú sokszöget írunk. Az n -szög minden oldalán kijelölünk egy pontot. Bizonyítsuk be, hogy az így kijelölt pontok, mint csúcsok által meghatározott sokszög kerülete legalább $2S/R$.

5. Legyen $f(x) = x^3 - x + 1$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $m > 1$ természetes számra az

$$m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$$

számok páronként relatív prímek.

6. Egy $n \times n$ -es sakktábla egyik sarkában áll egy bábu. Két játékos felváltva tolja a bábút egy szomszédos mezőre. (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.) Egy mezőre másodszor rálépni nem szabad. Az veszít, aki nem tud lépni.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor a kezdő tud nyerni, ha n páratlan, akkor a másik.

b) Melyik játékos tud nyerni, ha a bábu nem a sarokmezőről, hanem azzal szomszédos mezőről indul?

7. Bizonyítsuk be, hogy van olyan A szám, hogy az $y = A \cdot \sin x$ függvény grafikonjába legalább 1978 különböző oldalú négyzet beírható. (Egy négyzetet beírhatónak nevezünk, ha mind a négy csúcsa a görbén van.)

8. Három automata természetes számokból álló számpárokat nyomtat kis lapocskákra. Az első automata, ha egy (a, b) kartont adnak neki, egy $(a + 1, b + 1)$ feliratú kartont ad ki; a második az (a, b) karton mellé egy $(a/2, b/2)$ feliratú lapocskát nyomtat (csak akkor működik, ha a és b is páros); végül a harmadik két kártya, (a, b) és (b, c) mellé az (a, c) kártyát is kiadja. Kezdetben egyetlen $(5, 19)$ feliratú kartonunk van. Kaphatunk-e az automatákat megfelelő sorrendben működtetve a) $(1, 50)$, b) $(1, 100)$ feliratú kartont?

c) Kezdetben egy (a, b) feliratú kartonunk van, $a < b$, és egy $(1, n)$ feliratú kartont szeretnénk. Milyen n -re érhetjük ezt el?

9. Mutassuk meg, hogy van olyan korlátos $\{x_n\}$ sorozat, hogy bármely különböző k és m természetes számra

$$|x_m - x_k| \geq \frac{1}{|k - m|}.$$

10. Adott két kupac gyufaszál, az egyikben m gyufa van, a másikban n , és $m > n$. Két játékos felváltva vesz a kupacokból. Egy lépésben a soron következő játékos egy kupacból tetszőleges (nullától különböző) számú gyufát vehet el, úgy hogy az elvett gyufák száma többszöröse legyen a másik kupacban lévő gyufák számának. Az a játékos nyer, aki valamely kupac összes gyufáját el tudja venni.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $m > 2n$, akkor a kezdő tud nyerni.

b) Mely α értékekre igaz a következő állítás: ha $m > \alpha n$, akkor a kezdő játékos tud nyerni?