A legkisebb négyzetek módszere

Lapunk 53. kötetének 175. oldalán egy fizikafeladat megoldása során egy tömegpont pályájáról kiderül, hogy egyenlete

$$s(t) = At^2 + Bt + C + D\sin(\omega t + \delta)$$

alakú, és a konstansok értéke

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{2}{\pi}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{\pi^2}, \quad \omega = \pi \quad \delta = 0.$$

Gyakran találkozunk ehhez hasonló feladattal: ismerjük egy függvényt definiáló képlet alakját, bizonyos hibával megmérjük néhány helyen a függvény értékét, és ezek alapján meg szeretnénk határozni a képletben szereplő ismeretlen együtthatók értékét. Nyilván olyan együtthatókat fogunk választani, amelyek a legjobb közelítést adják. De mit jelent az, hogy legjobb közelítés?

A fizikusok mérési adataihoz mi is kitűztünk egy feladatot (F. 2037.). Elhagytuk a szinuszos tagot, és azt a parabolát kerestük, amelytől vett maximális eltérés a legkisebb. Mint kiderült így a feladatot elég nehéz megoldani. A megoldás alapötletét újra kitűztük a 2063-as [1] feladatban, ennek alapján megtalálható az általános módszer is, a végrehajtása azonban igen nagy munka.

Ezek a nehézségek vezethették Gausst arra az elhatározásra, hogy csillagászati számításaiban ne az abszolút hibával mérje a közelítés jóságát, hanem a kvadratikus eltéréssel. Általában, ha az x_i, y_i, $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ mérési adatokat az $y = f(x)$ függvénnyel közelítjük, a kvadratikus eltérés a

$$Q = \big(y_1 - f(x_1)\big)^2 + \big(y_2 - f(x_2)\big)^2 + \ldots + \big(y_n - f(x_n)\big)^2$$

összeg. Ezt kényelmesebb felírni a szumma jel segítségével:

$$Q = \sum_{i-1}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2.$$

A Gausstól származó legkisebb négyzetek módszere alapján valahányszor sok függvény közül kell választanunk, mindig azt részesítjük előnyben, amelyikhez a legkisebb kvadratikus eltérés tartozik.

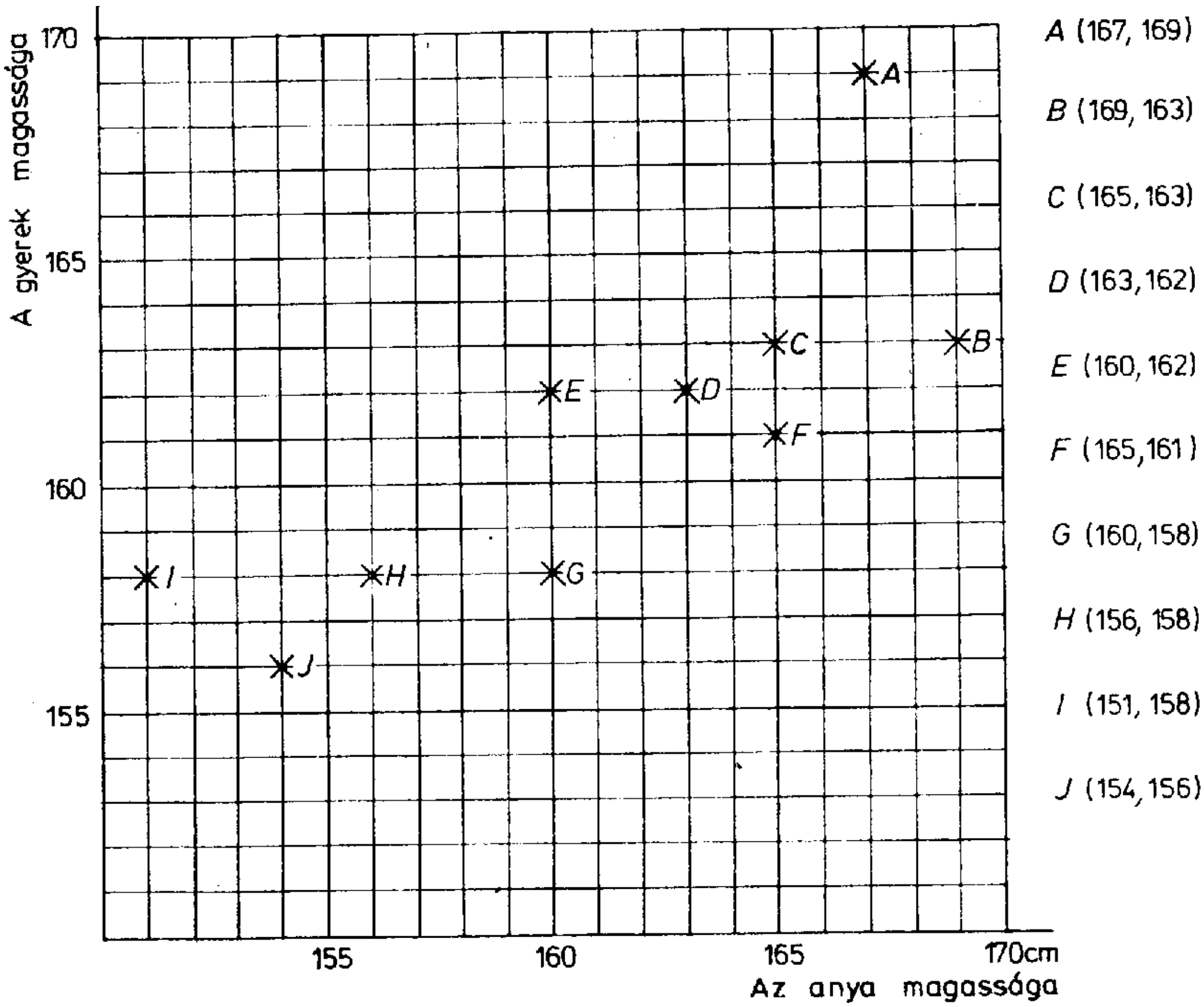
Ha a figyelembe vett függvények $f(x) = ax + b$ alakúak, feladatunk annak az a, b számpárnak meghatározása, amelyre a

$$Q = \sum_{i-1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

négyzetösszeg minimális. Ezt az a, b számpárt kell meghatározni, vagy a megfelelő egyenest megrajzolni a mellékelt 3. feladatban közölt adatokhoz. (Sorozatunkban összesen hat feladatot tűzünk ki. Az első kettő az adásban szerepelt.)

3. feladat Melyik egyenes alapján lehet a legjobb becslést adni a gyerek magasságára?

[1] A két feladat megoldását márciusi számunkban közöljük. (A Szerk.)



4. feladat. Ha 9 kockát feldobunk, amelyek mindegyikének k lapja piros, akkor 100 esetből várhatóan hányszor fordul elő, hogy a piros lapok közül legfeljebb n van felül?

n, k	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							

Fogadjunk!

Varga Tamástól származik a következő játék (a szabályait kissé módosítottuk). Választunk egy véletlen eseményt, amelyet akárhányszor meg tudunk ismételni, lényegében hasonló körülmények között. Jelöljük ezt az eseményt E-vel. Mondjuk E az az esemény, hogy ha 9 kockát feldobunk, melyek mindegyikének 1 lapja piros, akkor a piros lapok közül legfeljebb 3 van felül. A játékosok mindegyike felírja egy lapra, hogy szerinte a választott esemény 100 esetből várhatóan hányszor fordul elő. (Amíg ezzel mindenki el nem készül, a játékosok ne nézzék meg, mit írtak a többiek.) A tippek alapján kiosztjuk a szerepeket. Aki a legnagyobb számot írta, az lesz a Felső, tippjét jelöljük F-fel. Aki a legkisebb számot írta, az lesz az Alsó, tippje A. (Egyenlőség esetén Felső is, Alsó is több játékos is lehet egyszerre.) A többiek a kibicek. Ezután levonunk a Felsőtől F, Alsótól $(100 - A)$ pontot, és minden kibicnek adunk $(F - A)$ pontot. Végül a Felső megkísérli az E eseményt előidézni. Egyetlen kísérletet végezhet, ha ebben E bekövetkezik, ő kap 100 pontot, különben Alsó. Ha tehát E a mondott esemény, akkor a Felső feldob 9 kockát, és megszámolja, hogy hány piros lap kerül felülre. Ha ezek száma legfeljebb 3, a Felső, különben pedig Alsó kap 100 pontot.

Ezt a játékot a kedves olvasó is játszhatja családja vagy barátai körében, a mellékelt 4. feladatban szereplő hetven esemény bármelyikével. Célszerű sorról sorra haladni, de akit a két szélső oszlop zavar, az hagyja ki őket. Mi sajnos nem tudunk mindenkivel játszani, így arra kérjük az olvasót, higgye el nekünk, hogy tudjuk a pontos eredményt (és azt is, hogy ez mit jelent). Mi a hozzánk beérkező tippeknek a pontos értékről vett kvadratikus eltérését fogjuk kiszámolni, és játékunkat az nyeri, akinek a legkisebb a kvadratikus eltérése.

Öröklődés

Ketten játszhatják a következő játékot. Választanak egy nem túl nagy számot jelöljük ezt n-nel, mondjuk $n = 3$, és megállapodnak abban, hogy a magyar kártya számozott lapjai annyi pontot érnek, amennyi a rajtuk levő szám, az alsó, felső, király ász, pontértéke pedig rendre 11, 12, 13, 14. Mindkét játékos kap $2n$ darab lapot, és felír egy cédulára egy számot. (Se a lapjait, se a számát nem mutatja meg a másiknak.) Aztán mindketten kihúznak n lapot, a másik lapjai közül, és összeadják az együtt kihúzott $2n$ lap pontértékét. Az nyer, akinek a céduláján levő szám közelebb van a kapott összeghez. (Kár volna tagadni, hogy ez a játék Czeizel doktor tévébeni előadásainak a hatására jutott eszünkbe).